SN per $MELL_2$

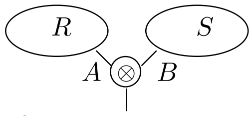
Paolo Tranquilli

7 giugno 2005

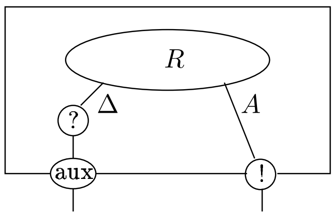
PN indicherà qui l'insieme dei proof-net senza additivi ma con i quantificatori, ovvero i proofnet della $MELL_2$. SN è l'insieme dei proofnet fortemente normalizzanti. Lo scopo è mostrare $SN = PN$.

Se A è una formula indico PN_A l'insieme dei proofnet che hanno tra le loro conclusioni un'occorrenza contrassegnata di A. A volte userò R_A, S_A come meta-variabili per proofnet di PN_A. X_A, Y_A sono meta-variabili usate per sottoinsiemi di PN_A. Definisco anche $SN_A = SN \cap PN_A$.

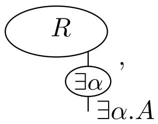
Definisco una serie di operazioni binarie e unarie su proofnet con conclusioni contrassegnate che rispecchiano le regole di composizione dei proofnet. Ognuna delle operazione ne induce una sugli insiemi di proofnet con conclusioni contrassegnate.

- $R_A \otimes S_B$:= 

, $X_A \otimes Y_B := \{\, R_A \otimes S_B \mid R_A \in X_A, \quad S_B \in Y_B \,\}$;

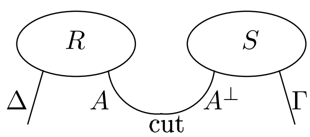
- $!R_A$:= 

, $!X_A := \{\, !R_A \mid R_A \in X_A \,\}$;

- $\exists\alpha.R_{A[B/\alpha]}$:= 

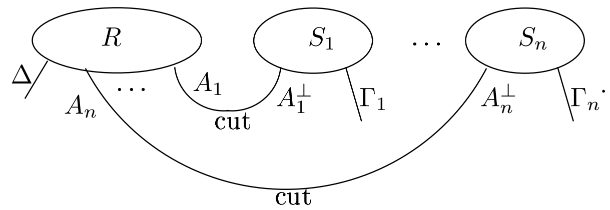
, $\exists\alpha.X_{A[B/\alpha]} := \{\, \exists\alpha.R_{A[B/\alpha]} \mid R_{A[B/\alpha]} \in X_{A[B/\alpha]} \,\}$.

Se $R \in PN_A$ è un proofnet di conclusioni Δ, A e $S \in PN_{A^\perp}$ è un proofnet di conclusioni $A^\perp, \Gamma$, indico con $R \smile S$ il proofnet ottenuto con un taglio tra A e $A^\perp$:

$R \smile S$:= 

.

Analogamente, se R è un proofnet che ha tra le conslusioni $A_1, \ldots, A_n$ e $S_1, \ldots, S_n$ sono dei proofnet con $S_i \in PN_{A_i^\perp}$, indicherò con $R \smile \vec{S}$ il proofnet ottenuto tagliando tutte le relative conclusioni di R con quelle contrassegnate di $\vec{S}$:

$R \smile \vec{S} :=$ 

Dato $X_A \subseteq PN_A$ definiamo il suo duale $X_A^{\perp} \subseteq SN_{A^{\perp}}$:

$$X_A^{\perp} := \{\, S \in SN_{A^{\perp}} \mid \forall R \in X_A : R \smile S \in SN \,\}.$$

- se $X_A \cap SN \neq \emptyset$ allora $X_A^{\perp} \neq \emptyset$;
- $\emptyset_A^{\perp} = SN_{A^{\perp}}$;
- ho le solite proprietà dei duali:
  - $X_A \subseteq Y_A \implies Y_A^{\perp} \subseteq X_A^{\perp}$;
  - $X_A \subseteq X_A^{\perp\perp}$;
  - dalle precedenti: $X_A^{\perp} = X_A^{\perp\perp\perp}$.

Diremo che X_A è riflessivo se equivalentemente $X_A = X_A^{\perp\perp}$ o $X_A = Y_{A^{\perp}}^{\perp}$ per un certo $Y_{A^{\perp}}$. Chiaramente in tal caso $X_A \subseteq SN_A$, e inoltre $X_A \neq \emptyset$. Per ogni A esiste almeno un insieme riflessivo X_A (ad esempio $SN_A = \emptyset_{A^{\perp}}^{\perp}$).

$\mathcal{R}$ è l'insieme di tutti gli insiemi riflessivi (anche se li metto tutti insieme mantengono la conclusione contrassegnata), e $\mathcal{R}_A := \mathcal{R} \cap PN_A$

Sia $e : \mathbb{V} \to \mathcal{R}$ qualunque. Se $X \in \mathcal{R}$ denoto

$$e[X/\alpha](\beta) := \begin{cases} X & \text{se } \beta = \alpha, \\ e(\beta) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia A una formula (risp. R un proofnet) con $\vec{\beta} = \mathrm{FV}(A)$ (risp. $\mathrm{FV}(\vec{A})$ dove $\vec{A}$ sono le conclusioni di R), e sia $\vec{B}$ tale che $\forall j : e(\beta_j) \in \mathcal{R}_{B_j}$: allora definisco $A_e := A[\vec{B}/\vec{\beta}]$ (risp. $R_e := R[\vec{B}/\vec{\beta}]$). Chiaramente le conclusioni di R_e sono le formule $(A_i)_e$, e $(A^{\perp})_e = A_e^{\perp}$.

Definisco ricorsivamente un'estensione $e^* : \mathrm{Form} \to \mathcal{R}$ e contemporaneamente mostro che per qualunque formula la conclusione contrassegnata di $e^*(A)$ (qualunque sia e) è A_e.

- $e^*(\alpha) := e(\alpha)$; banale;

- $e^*(A \otimes B) := (e^*(A) \otimes e^*(B))^{\perp\perp}$; la conclusione è per ipotesi induttiva $A_e \otimes B_e = (A \otimes B)_e$;
- $e^*(!A) := (!e^*(A))^{\perp\perp}$; la conclusione è per ipotesi induttiva $!A_e = (!A)_e$;
- $e^*(\exists\alpha.A) := \left(\bigcup_{X\in\mathcal{R}} \exists\alpha.(e[X/\alpha])^*(A)\right)^{\perp\perp}$, e la definizione è ben posta perché per ipotesi induttiva $(e[X_B/\alpha])^*(A)$ ha per conclusione $A_{e[X_B/\alpha]} = A[B/\alpha, \vec{B}/\vec{\beta}]$ dove $\vec{\beta} = \mathrm{FV}(A) \setminus \{\alpha\} = \mathrm{FV}(\exists\alpha.A)$ e $e(\beta_j) \in \mathcal{R}_{B_j}$ e quindi ho come applicare la regola $\exists$, ottenendo qualunque siano B e X_B la conclusione $\exists\alpha.A[\vec{B}/\vec{\beta}] = (\exists\alpha.A)_e$, che è quindi la conclusione di $e^*(\exists\alpha.A)$;
- in tutti gli altri casi $e^*(A) := (e^*(A^\perp))^\perp$, e per ipotesi induttiva la conclusione è $(A_e^\perp)^\perp = A_e$. Quindi (visto che $X^{\perp\perp\perp} = X^\perp$):

$$\begin{aligned}
&e^*(\alpha^\perp) := (e^*(\alpha))^\perp,\\
&e^*(A \parr B) := (e^*(A^\perp \otimes B^\perp))^\perp = (e^*(A^\perp) \otimes e^*(B^\perp))^\perp,\\
&e^*(?A) := (e^*(!A^\perp))^\perp = (!e^*(A^\perp))^\perp,\\
&e^*(\forall\alpha.A) := (e^*(\exists\alpha.A^\perp))^\perp = \left(\bigcup_{X\in\mathcal{R}} \exists\alpha.(e[X/\alpha])^*(A^\perp)\right)^\perp.
\end{aligned}$$

Quindi praticamente per costruzione ho in generale $e^*(A^\perp) = (e^*(A))^\perp$.

Definisco l'insieme delle interpretazioni

$$\mathcal{T} := \{\, \tau : \mathrm{Form} \to \mathcal{R} \mid \tau = e^* \text{ per qualche } e : \mathbb{V} \to \mathcal{R} \,\}$$

e $\tau[X/\alpha] := (\tau|_{\mathbb{V}}[X/\alpha])^*$. Chiaramente $(\tau|_{\mathbb{V}})^* = \tau$. Definisco $R_\tau := R_{\tau|_{\mathbb{V}}}$ e $A_\tau := A_{\tau|_{\mathbb{V}}}$. Quindi la conlcusione di $\tau(A)$ è A_τ.

Ora lo scopo è mostrare il seguente teorema:

Teorema 1. *Per ogni $R \in PN$ con conclusioni tutte e sole $\vec{A}$, per ogni $\tau \in \mathcal{T}$, per ogni $\vec{S}$ tale che $S_i \in \tau(A_i^\perp)$, ho che $R_\tau \smile \vec{S} \in SN$.*

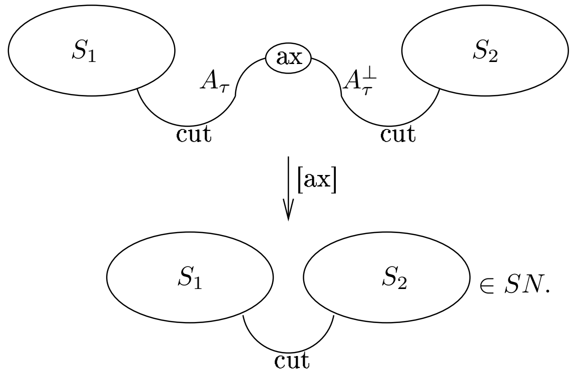
Osservazione 2. Visto che $\tau(A) = \tau(A)^{\perp\perp} = \tau(A^\perp)^\perp$, l'enunciato è equivalente a dire:
per ogni $R \in PN$ con conlusioni tutte e sole $\vec{A}$ e B, per ogni $\tau \in \mathcal{T}$, per ogni $\vec{S}$ tale che $S_i \in \tau(A_i^\perp)$ ho che $R_\tau \smile \vec{S} \in \tau(B)$.

Segue il vero scopo, visto che un sottoproofnet di un proofnet SN è SN e posso scegliere τ in modo che $\tau(\alpha) \in \mathcal{R}_\alpha$ per ogni variabile α (da cui $R_\tau = R$).

Teorema 3. $SN = PN$.

Dimostrazione teorema 1. Si procede per induzione sulla taglia, distinguendo a seconda dell'ultima regola usata nella costruzione del proofnet, utilizzando ogni volta l'enunciato più comodo.

ax: Conclusioni A e $A^{\perp}$. Siano $S_1 \in \tau(A^{\perp}) = \tau(A)^{\perp}$ e $S_2 \in \tau(A)$. Allora:

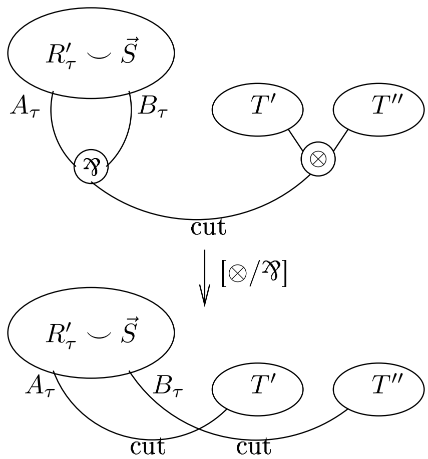


Se $R \smile \vec{S}$ avesse una riduzione infinita l'avrebbe anche $S_1 \smile S_2$.

$\otimes$**:** $R = R_{A\otimes B} = R'_A \otimes R''_B$ (e $R_\tau = R'_\tau \otimes R''_\tau$): mettendo da parte la conclusione $A \otimes B$ divido le conclusioni di R tra le A'_i conlcusioni di R' e le A''_j conclusioni di R'', e divido analogamente i proofnet $\vec{S}$ da testare contro le conclusioni diverse da $A \otimes B$ di R tra gli $S'_i \in \tau({A'_i}^{\perp})$ e gli $S''_i \in \tau({A''_i}^{\perp})$. Allora per ipotesi induttiva (l'enunciato alternativo), $R'_\tau \smile \vec{S'} \in \tau(A)$ e $R''_\tau \smile \vec{S''} \in \tau(B)$. Da cui

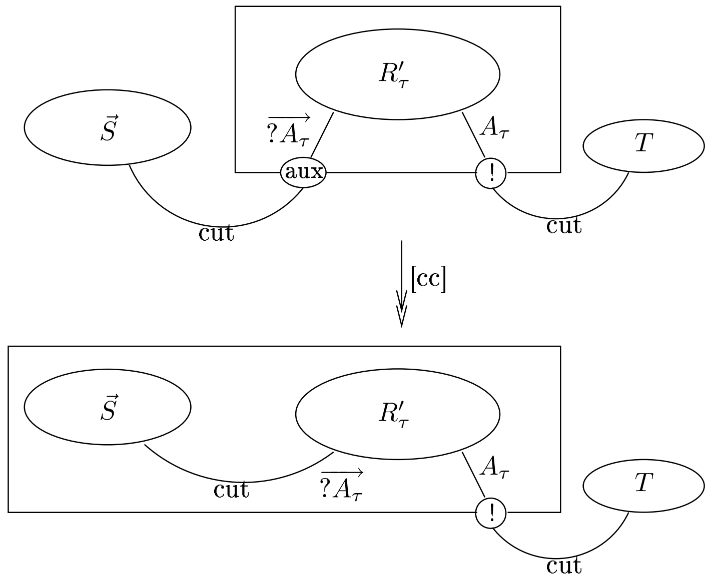
$$R_\tau \smile \vec{S} = (R'_\tau \smile \vec{S'}) \otimes (R''_\tau \smile \vec{S''}) \in \tau(A) \otimes \tau(B) \subseteq \tau(A \otimes B).$$

$\parr$**:** $R = R_{A \parr B}$ è ottenuto da un proofnet R' di conlusioni $\vec{A}$, A e B. Sia $\vec{S}$ con $S_i \in \tau(A_i^{\perp})$. Devo mostrare che $R_\tau \smile \vec{S} \in \tau(A \parr B) = (\tau(A^{\perp}) \otimes \tau(B^{\perp}))^{\perp}$, ovvero per definizione che preso un qualunque $T_{(A^{\perp}\otimes B^{\perp})_\tau} = T'_{A^{\perp}_\tau} \otimes T''_{B^{\perp}_\tau} \in \tau(A^{\perp}) \otimes \tau(B^{\perp})$ allora $(R_\tau \smile \vec{S}) \smile T \in SN$. L'ipotesi induttiva e lo stesso ragionamento usato per ax mi dà il resto.



$\in SN.$

!: $R = R_{!A}$ è ottenuto con una box da un proofnet R' di conclusioni $\overrightarrow{?A}$ e A. Siano $\vec{S}$ tali che $S_i \in \tau(!A_i^\perp)$ e $T \in \tau(?A^\perp) = (!\tau(A))^\perp$. Allora:

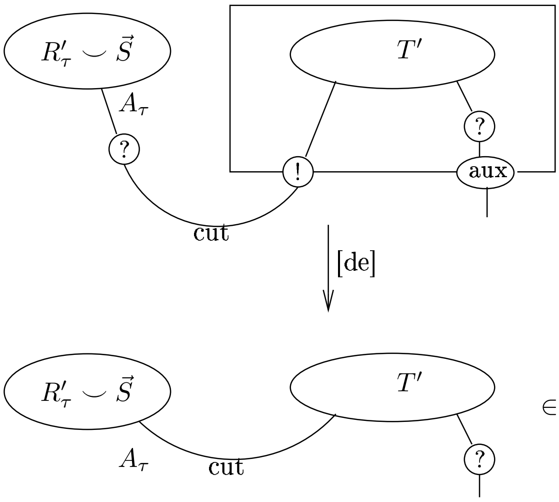


Ora per ipotesi induttiva $R'_\tau \smile \vec{S} \in \tau(A)$ per cui $!(R'_\tau \smile \vec{S}) \in !\tau(A)$ e qui sopra $!(R'_\tau \smile \vec{S}) \smile T \in SN$. Segue quanto voluto per il

Lemma 4 (striction). *In $MELL_2$ se $R \overset{[cc]}{\to} R'$ e $R' \in SN$ allora $R \in SN$.*

?: $R = R_{?A}$ é ottenuto da un proofnet R' di conclusioni $\vec{A}$ e A. Sia $\vec{S}$ come al solito. Devo mostrare $R_\tau \smile \vec{S} \in \tau(?A) = (!\tau(A^\perp))^\perp$, ovvero che per ogni

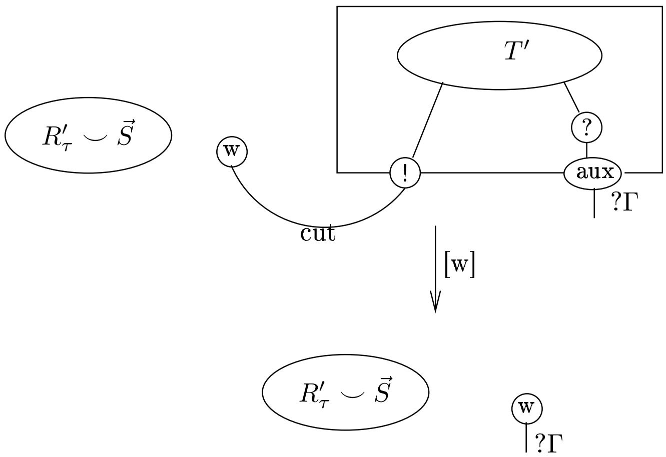
$T_{!A_\tau^\perp} = !T_{A_\tau^\perp} \in !\tau(A)^\perp$ ho $(R_\tau \smile \vec{S}) \smile T \in SN$, e per ipotesi induttiva ho $R'_\tau \smile \vec{S} \in \tau(A)$. Allora:



$\in SN.$

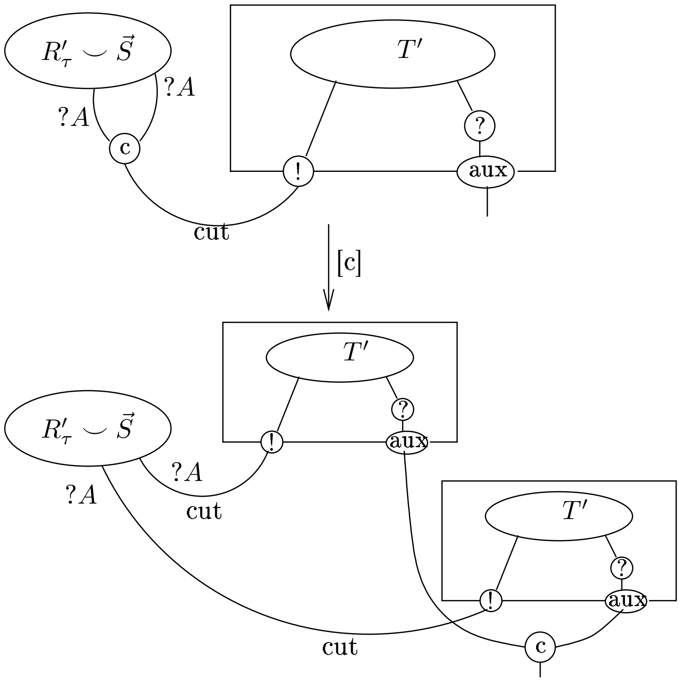
L'affermazione segue dal fatto che senza le regole why not ho $(R'_\tau \smile \vec{S}) \smile T' \in SN$, ma aggiungere i why not non cambia la normalizzazione. Per il resto si ragiona come prima.

W: $R = R_{?A}$ è ottenuto da un proofnet R' di conclusioni $\vec{A}$. Come prima devo mostrare che per ogni $T_{!A_\tau^\perp} = !T_{A_\tau^\perp} \in !\tau(A)^\perp$ ho $(R_\tau \smile \vec{S}) \smile T \in SN$. Avendo la seguente situazione:



ho che ogni passo di riduzione di $(R_\tau \smile \vec{S}) \smile T$ è o un passo di $R'_\tau \smile \vec{S} \in SN$ per ipotesi induttiva, o è un passo di $T \in \tau(!A^\perp) \subseteq SN$, oppure è il passo di [de] che pone fine a tutti i passi di T. Quindi ho quanto voluto.

c: Inizio come i due casi precedenti. Quindi ho



Per prima cosa il risultato di [cc] è SN perché per ipotesi induttiva lo è lo stesso proofnet senza contrazioni tra le due box. Inoltre ogni passo di $(R_\tau \smile \vec{S}) \smile T$ è riconducibile a uno o più passi di questo proofnet, e quindi è anch'esso in SN.

∃: $R = R_{\exists\alpha.A} = \exists\alpha.R'_{A[B/\alpha]}$, con altre conclusioni $\vec{A}$, da testare contro $\vec{S}$, $S_i \in \tau(A_i^\perp)$. Per ipotesi induttiva $R'_\tau \smile \vec{S} \in \tau(A[B/\alpha])$. D'altra parte ho che $\tau(A[B/\alpha]) = \tau[\tau(B)/\alpha](A)$ e quindi

$$R_\tau \smile \vec{S} = \exists\alpha.(R'_\tau \smile \vec{S}) \in \exists\alpha.\tau[\tau(B)/\alpha](A) \subseteq$$
$$\subseteq \bigcup_{X\in\mathcal{R}} \exists\alpha.\tau[X/\alpha](A) \subseteq \tau(\exists\alpha.A)$$

che è quanto voluto.

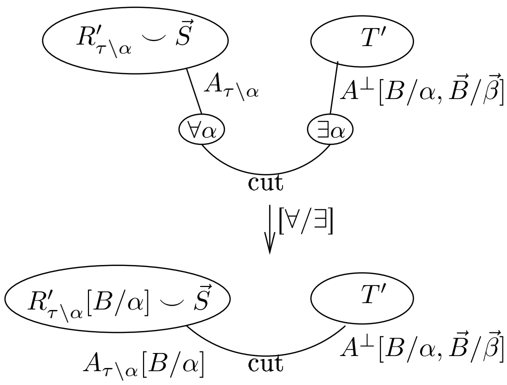
∀: $R = R_{\forall\alpha.A}$ è ottenuto da un proofnet R' di conclusioni $\vec{A}$ e A. Essendo $\forall$ l'ultima regola applicata nella costruzione del proofnet, ho che $\alpha \notin \mathrm{FV}(\vec{A})$. Devo mostrare, dati $\vec{S}$ con $S_i \in \tau(A_i^\perp)$, che

$$R_\tau \smile \vec{S} \in \tau(\forall\alpha.A) = \left(\bigcup_{X\in\mathcal{R}} \exists\alpha.\tau[X/\alpha](A^\perp)\right)^\perp.$$

Posso supporre, a meno di rinominare α, che essa non appaia in $\vec{S}$. Sia dunque

$$T \in \bigcup_{X \in \mathcal{R}} \exists\alpha.\tau[X/\alpha](A^{\perp}),$$

ovvero esiste un insieme riflessivo Y_B con $T \in \exists\alpha.\tau[Y/\alpha](A^{\perp})$, ovvero ancora $T = \exists\alpha.T'$ con $T' \in (\tau[Y/\alpha](A))^{\perp}$ di conclusione $A^{\perp}_{\tau[Y/\alpha]} = A^{\perp}[B/\alpha, \vec{B}/\vec{\beta}]$ dove come al solito $\vec{\beta} = \mathrm{FV}(A) \setminus \{\alpha\}$ e $\tau(\beta_j) \in \mathcal{R}_{B_j}$. Allora



dove con $R'_{\tau\backslash\alpha}$ e $A_{\tau\backslash\alpha}$ indico la solita sostituzione indotta da τ ignorando però α (tale è la sostituzione indotta da τ su R). Applichiamo quindi l'ipotesi induttiva a R' cambiando stavolta l'interpretazione con $\tau' = \tau[Y/\alpha]$. Allora $R'_{\tau'} = R'_{\tau\backslash\alpha}[B/\alpha]$ per cui ottengo che $R'_{\tau\backslash\alpha}[B/\alpha] \smile \vec{S} \in \tau[Y/\alpha](A)$ per cui

$$(R'_{\tau\backslash\alpha}[B/\alpha] \smile \vec{S}) \smile T' \in SN.$$

Il resto come nei casi precedenti.

$\square$