SECONDO ESONERO DI AM1
10/01/2008 - Soluzioni

Esercizio 1.

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+\sin n}{n+\cos n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Razionalizzando si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1-n^2+n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Per il secondo limite ci sono vari modi, ne mostro tre.

- $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+\sin n}{n+\cos n}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\sin n-\cos n}{n+\cos n}\right)^{\frac{n+\cos n}{\sin n-\cos n}\cdot\frac{\sin n-\cos n}{n+\cos n}\sqrt{n}}.$$

  Ora
  $$0 \overset{n\to+\infty}{\longleftarrow} -\frac{2}{n+1} \leq \frac{\sin n-\cos n}{n+\cos n} \leq \frac{2}{n-1} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
  e quindi per il teorema dei carabinieri $\frac{\sin n-\cos n}{n+\cos n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Possiamo quindi applicare il limite notevole $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, e il limite di sopra si riduce a calcolare a esponente il limite di $\frac{\sin n-\cos n}{n+\cos n}\sqrt{n}$. Utilizzando come sopra il teorema dei carabinieri:
  $$0 \overset{n\to+\infty}{\longleftarrow} -\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{\sin n-\cos n}{n+\cos n}\sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{1-\frac{1}{n}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
  otteniamo continuando il limite di sopra:
  $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\sin n-\cos n}{n+\cos n}\right)^{\frac{n+\cos n}{\sin n-\cos n}\cdot\frac{\sin n-\cos n}{n+\cos n}\sqrt{n}} = e^0 = 1.$$

- Si può utilizzare da subito il teorema dei carabinieri, maggiorando e minorando opportunamente $\sin n$ e $\cos n$:
  $$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n}} \leq \left(\frac{n+\sin n}{n+\cos n}\right)^{\sqrt{n}} \leq \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\sqrt{n}}.$$
  Ora
  $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{\left(-\frac{n+1}{2}\right)\left(-\frac{2\sqrt{n}}{n+1}\right)} = e^0 = 1,$$
  seguendo ragionamento e limiti notevoli analoghi a quelli del punto precedente. Simmetricamente:
  $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{n}}{n-1}} = e^0 = 1.$$
  Si conclude che per il teorema dei carabinieri il limite vale 1.

- Si può considerare numeratore e denominatore separatamente, fattorizzando prima n:
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+\sin n}{n+\cos n}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)^{\sqrt{n}}}{\left(1+\frac{\cos n}{n}\right)^{\sqrt{n}}}.$$
Ora, procedendo molto similmente al primo punto, visto che $\frac{\sin n}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ per il teorema dei carabinieri:
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)^{\frac{n}{\sin n}\cdot\frac{\sqrt{n}\sin n}{n}} = e^0 = 1,$$
e simmetricamente per il denominatore, così che
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)^{\sqrt{n}}}{\left(1+\frac{\cos n}{n}\right)^{\sqrt{n}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Note su errori ricorrenti:

- il limite notevole del seno è $\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$, non $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}$, che appunto viene 0 per il teorema dei carabinieri;
- 1^∞ è forma indeterminata, non viene 1 automaticamente;
- sostituire il valore di un limite al posto di parte di una successione si può *solo se* si è sicuri di non poter incappare in una forma indeterminata. Ad esempio ***non*** si può scrivere
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}(1+0)^{\sqrt{n}} = 1.$$

Esercizio 2.

Studiare la convergenza della seguente serie.
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{k}+2k\log k}{k+3}\cdot\sin\frac{1}{k^2}.$$

Svolgiamo con due modi, criterio del confronto e criterio del confronto asintotico. Tutti gli altri criteri qui falliscono: ricordo che gli altri criteri coinvolgono nella dimostrazione un confronto con una serie geometrica. Come regola intuitiva si può indicare che gli altri criteri possono funzionare solo se si ha a che fare con qualcosa di simile alla geometrica se non più forte (come il fattoriale ad esempio). Qui non c'è nessuna potenza a esponente k. La serie è a termini positivi.

- Possiamo applicare le disuguaglianze $\sin x \leq x$ per $x \geq 0$ e $\sqrt{n} \leq \log n$ definitivamente (in realtà vale per ogni n, ma ci basta sapere che $n - \log n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ per sapere che vale definitivamente). Qui abbiamo:

$$\frac{\sqrt{k} + 2n \log k}{k+3} \cdot \sin \frac{1}{k^2} \leq \frac{k\sqrt{k} + 2k\sqrt{k}}{k} \cdot \frac{1}{k^2} = 3\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}},$$

  e visto che $\sum_{k=0}^{+\infty} 3\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ converge (in quanto $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge per $\alpha > 1$) abbiamo che la serie **converge**.

- Facciamo un confronto asintotico con $\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$.

$$\lim_{k\to+\infty} k^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{k} + 2k \log k}{k+3} \cdot \sin \frac{1}{k^2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{k^2} k^2 \sin \frac{1}{k^2} \cdot \frac{k \log k \left(\frac{1}{\sqrt{k}\log k} + 2\right)}{k\left(1 + \frac{3}{k}\right)} =$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{2 \log k}{k^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

  dove si sono utilizzati i limiti notevoli $\lim_{n\to+\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = 0$ con $\alpha > 0$.

  Per il criterio del confronto asintotico, visto che $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ converge, anche la serie dell'esercizio **converge**.

Note:

- Il fatto che $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ è condizione necessaria ma non sufficiente (criterio di Cauchy). Per essere proprio chiari: dimostrare $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ **non** mostra che la serie $\sum a_k$ converge. Questo criterio può essere usato solo per mostrare che una serie diverge.

- Richiamo il confronto asintotico, che molti hanno applicato nel verso sbagliato.

  Se abbiamo
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0,$$
  allora vale
$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ converge} \implies \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge},$$
  e quindi anche l'implicazione inversa
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ diverge} \implies \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ diverge}.$$

In nessun modo vale l'implicazione inversa, ovvero dalla divergenza di $\sum b_k$ non c'è modo di ottenere la divergenza di $\sum a_k$. Come controesempio semplicissimo basta prendere $a_k = 0$, e b_k una qualunque la cui somma diverga, anche $b_k = 1$. Il rapporto viene infatti 0.

Il confronto può essere fatto nell'altro verso quando otteniamo $+\infty$ come limite, semplicemente perché (a_k e b_k sono positive):

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0 \iff \lim_{k\to+\infty} b_k a_k = +\infty.$$

Come idea mnemonica, si può pensare intuitivamente al fatto che il confronto sia una gara su quanto forte le due successioni vanno a 0. $\frac{a_k}{b_k} \to 0$ indica la "vittoria" di a_k, se viene $+\infty$ ha "vinto" b_k. La convergenza di una serie viene da quanto forte i termini vanno a 0. Se una successione "vince" su un'altra la cui somma converge, allora converge anche la sua. Se "perde" con un'altra la cui somma diverge, allora diverge anche la sua. Se a_k "vince" su una serie la cui somma diverge, non so dire niente: vincere una gara di corsa contro una tartaruga non implica fare i 100 metri in meno di 12 secondi, vincere contro Micheal Johnson sì!

Un caso a parte è quando $\frac{a_k}{b_k} \to L$ con L **finito** e **diverso da 0**. Continuando a parlarne come prima, possiamo dire dal punto di vista della convergenza che nella gara a 0 in questo caso le successioni arrivano pari merito. Quindi abbiamo che se

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = L, \quad \text{con } 0 < L < +\infty,$$

allora abbiamo la doppia implicazione

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge} \iff \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ converge.}$$

Attenzione: **non** basta che il limite sia finito per la doppia implicazione, deve essere anche diverso da 0!

Esercizio 3.

Enunciare la definizione di massimo e minimo limite di una successione. Trovare massimo e minimo limite della successione seguente.

$$a_n := \cos n\frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{n}}.$$

Il massimo limite di una successione è l'estremo inferiore dei maggioranti definitivi, ovvero di quei numeri M tali che $a_n \leq M$ definitivamente. Ovvero L è massimo limite di a_n se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \bar{n} \mid \forall n > \bar{n} a_n < L + \varepsilon$$

(ovvero appena mi sposto sopra ad L trovo un maggiorante definitivo) e inoltre

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \text{ infiniti } n \text{ tali che } a_n > L - \varepsilon$$

(ovvero appena mi sposto sotto ad L trovo qualcosa che non è maggiorante definitivo). Questa seconda condizione è equivalente (posto che vale la prima) a trovare una sottosuccessione a_{n_k} che tende ad L.

La definizione per il minimo limite è simmetrica.

Innanzitutto:

$$\cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 4k, \\ 0 & \text{se } n = 2k+1, \\ -1 & \text{se } n = 4k+2, \end{cases}$$

e $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1$.

Mostro che $\max\lim a_n = 2$.

- Considero la sottosuccesione a_{4k}:

$$\lim_{k\to+\infty} a_{4k} = \lim_{k\to+\infty} 1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{4k}} = 1 + 1 = 2.$$

- Per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\cos n\frac{\pi}{2} + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} le 1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}},$$

  e abbiamo

$$1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} < 2 + \varepsilon \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \log(1+\varepsilon) \iff n > \frac{1}{\log(1+\varepsilon)},$$

  che quindi è vero definitivamente.

Mostro che $\min\lim a_n = 0$.

- Considero la sottosuccesione a_{4k+2}:

$$\lim_{k\to+\infty} a_{4k+2} = \lim_{k\to+\infty} -1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{4k+2}} = -1 + 1 = 0.$$

- Per ogni n abbiamo

$$\frac{1}{n} > 0 \implies \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} > 1 \implies \cos n\frac{\pi}{2} + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} > -1 + 1 = 0.$$

  In questi casi vale subito la seconda condizione, in quanto per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni n (in particolare definitivamente) $a_n > 0 > 0 - \varepsilon$.

Note:

- La definizione di massimo e minimo limite non ha nulla a che fare con le sottosuccessioni pari e dispari di una successione. Non bisogna cementarsi su di esse, come molti hanno fatto. Molti esercizi sono su di esse perché è più facile creare in modo più o meno naturale successioni che hanno comportamento diverso sui pari e sui dispari. Nulla vieta però che la successione abbia comportamenti diversi su altri tipi di sottosuccessioni, ad esempio interi che hanno diverso resto modulo 4 come qui, o anche tutt'altro (ad esempio che abbiano una legge diversa sui quadrati perfetti h^2, o sugli elementi della successione di Fibonacci, o quant'altro).

- La proprietà
$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \iff a < b$$
vale solo se a e b sono entrambi positivi. Se hanno segno discorde, come poteva venire in questo esercizio cercando di fare $\frac{1}{n} > \log(1-\varepsilon)$, la disuguaglianza si risolve subito, proprio perché in mezzo c'è 0: $\frac{1}{n} > 0 > \log(1-\varepsilon)$.

- La proprietà di Archimede **non** va richimata laddove si chiede che una certa proprietà valga definitivamente, come nel caso di limiti o massimi e minimi limiti. Non si tratta di cercare **almeno un** naturale n che abbia una certa proprietà (come nel caso dei punti di accumulazione), ma di trovare che **tutti** gli n da un certo punto in poi hanno la proprietà. Per dire che una proprietà vale definitivamente basta trovare una disuguaglianza del tipo $n > A$ che implichi la proprietà (nel caso di limiti e massimi-minimi limiti A dipenderà da ε).

Esercizio 4.

Enunciare la classificazione delle discontinuità di una funzione (prima, seconda e terza specie). Determinare l'insieme di continuità della seguente funzione e classificarne le eventuali discontinuità.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}\sin x + 1}{1 - xe^{\frac{1}{x}}} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Prima specie o a salto: esistono finiti sia $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_2$, ma $L_1 \neq L_2$.

2. Seconda specie: almeno uno tra $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ non esiste o è infinito.

3. Terza specie o eliminabile: esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ (che accade se e solo se i limiti destro e sinistro sono uguali a L), ma $L \neq f(x_0)$.

Il denominatore della funzione non si annulla perché:

$$1 - xe^{\frac{1}{x}} = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x},$$

ma $e^z \geq z + 1 > z$, quindi $e^z \neq z$ per ogni z. Per il resto in tutte le $x \neq 0$ la funzione è composizione di funzioni continue, quindi è continua. In 0 dobbiamo distinguere per via dei due limiti

$$\lim_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Nel primo caso il limite non è nemmeno una forma indeterminata:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sin x + 1}{1 - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = \frac{0+1}{1-0} = 1.$$

Nel secondo caso ho, per i limiti notevoli $\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$,

$$\lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} x = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sin x = \lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} x \frac{\sin x}{x} = +\infty.$$

Per la funzione ho quindi una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, e come al solito fattorizzo rispetto alla parte che va più "forte":

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sin x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} x} \cdot \frac{1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sin x}}{\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} x} - 1} = 1 \cdot \frac{1+0}{0-1} = -1,$$

avendo nuovamente utilizzato $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Quindi 0 è una discontinuità di prima specie per f.

Esercizio 5.

Ricordiamo che una successione a_n si dice di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \mid \forall n, m > N : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Dimostrare che per una successione a_n in $\mathbb{R}$ è convergente se e solo se è di Cauchy.

La dimostrazione si può trovare su un qualunque libro di analisi. Una nota: il teorema richiesto è un'altra cosa rispetto al criterio di Cauchy per le serie convergenti. Quella è una conseguenza di quest'equivalenza.