PRIMO ESONERO DI AM1 - 6/11/2007
Soluzioni

Esercizio 1.
Dato l'insieme

$$S := \left\{ \cos(n\pi) + \frac{n^2 + (-1)^{n-1}}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

determinarne estremo superiore ed estremo inferiore, specificando se tale estremo sia rispettivamente massimo o minimo.

$\cos(n\pi) = (-1)^n$ e $\frac{n^2+(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, per cui

$$x \in S \iff x = \frac{1}{n^2} \text{ con } n \text{ dispari, oppure } x = 2 - \frac{1}{n^2} \text{ con } n \text{ pari.}$$

Mostriamo che 0 è estremo inferiore:

minorante Per ogni n dispari $\frac{1}{n^2} > 0$ (disuguaglianza stretta). Per ogni n pari si ha

$$n \geq 2 \implies n^2 \geq 4 \implies \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{4} \implies 2 - \frac{1}{n^2} \geq 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} > 0$$

(ancora disuguaglianza stretta, che assicura $0 \notin S$.

inf Per ogni $\varepsilon > 0$ cerchiamo un n (dispari) tale che

$$0 + \varepsilon > \frac{1}{n^2} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

e tale n esiste.

Mostriamo che 2 è estremo superiore.

maggiorante Per ogni n dispari si ha

$$n \geq 1 \implies \frac{1}{n^2} \leq 1 < 2$$

(disuguaglianza stretta). Per ogni n pari si ha

$$\frac{1}{n^2} > 0 \implies 2 - \frac{1}{n^2} < 2$$

(ancora con disuguaglianza stretta, che assicura $2 \notin S$).

sup Per ogni $\varepsilon > 0$ cerchiamo un n (pari) tale che

$$2 - \varepsilon < 2 - \frac{1}{n^2} \iff \frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

e tale n esiste.

Esercizio 2.
Determinare i punti di accumulazione del seguente insieme:

$$T := \left\{ \frac{n^2 + n - 1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup \left(\frac{11}{9}, \frac{5}{4} \right).$$

Mostrare inoltre che $x = 1 + \frac{3}{16}$ è un punto isolato.
Determinare se T è aperto, chiuso, o nessuno dei due.

$\frac{n^2+n-1}{n^2} = 1 + \frac{n-1}{n^2}$.
$\mathcal{D}(T) = \{1\} \cup \left[\frac{11}{9}, \frac{5}{4}\right]$. Infatti:

- $\left[\frac{11}{9}, \frac{5}{4}\right] = \mathcal{D}\left(\left(\frac{11}{9}, \frac{5}{4}\right)\right)$;
- mostriamo che 1 è punto di accumulazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ cerchiamo un $1 + \frac{n-1}{n^2}$ diverso da 1 (per questo basta $n > 1$) in $I(1, \varepsilon)$, ovvero:

$$\varepsilon > \left|1 + \frac{n-1}{n^2} - 1\right| = \frac{n-1}{n^2} \iff \varepsilon n^2 - n + 1 > 0 \iff$$
$$\iff n < \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \vee n > \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

quindi basta trovare un $n > \frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}$ e tale n esiste.

Possiamo già dire che T è chiuso, in quando $\mathcal{D}(T) \subseteq T$. Infatti $1 = 1 + \frac{1-1}{1^2} \in T$, $\frac{11}{9} = 1 + \frac{3-1}{3^2} \in T$, $\frac{5}{4} = 1 + \frac{2-1}{2^2} \in T$ e $\left(\frac{11}{9}, \frac{5}{4}\right) \subseteq T$.
I punti di T più vicini a $1 + \frac{3}{16}$ sono $1 + \frac{4}{25}$ e $1 + \frac{2}{9}$. Confrontiamo:

$$\frac{3}{16} - \frac{4}{25} = \frac{75 - 64}{400} = \frac{11}{400} \qquad \frac{2}{9} - \frac{3}{16} = \frac{32 - 27}{144} = \frac{5}{144}$$
$$144 \cdot 11 = 1584 < 8000 = 400 \cdot 5$$

per cui il più vicino è il primo.
Prendiamo come intorno

$$I := I\left(1+\frac{3}{16},\frac{11}{400}\right) = \left(1+\frac{4}{25},1+\frac{75+11}{400}\right) = \left(1+\frac{4}{25},1+\frac{43}{200}\right)$$

Vogliamo sfruttare il fatto che da $n = 5$ in poi i valori sono sempre più piccoli. Quindi intanto scartiamo i primi 3 valori (non bisogna contare il valore $1 + \frac{3}{16}$ per $n = 4$):

$n = 1$: $1 \notin I$.

$n = 2$: $1 + \frac{1}{4} = 1 + \frac{50}{200} \geq 1 + \frac{43}{200} \implies 1 + \frac{1}{4} \notin I$.

$n = 3$: $1+\frac{2}{9} \geq 1+\frac{43}{200}$, perché $2\cdot 200 = 400 > 387 = 43\cdot 9$, quindi $1+\frac{2}{9} \notin I$.

$n \geq 5$: Abbiamo:

$$1 + \frac{n-1}{n^2} \leq 1 + \frac{4}{25} \iff 25n - 25 \leq 4n^2 \iff 4n^2 - 25n + 25 \geq 0$$

dove $\Delta = 25\cdot(25-16) = 25\cdot 9 = 15^2$. Le soluzioni sono $\frac{25\pm 15}{8}$. Quindi, continuando:

$$\iff n \leq \frac{10}{8} \vee n \geq 5$$

che appunto per $n \geq 5$ accade sempre. Quindi ricapitolando per ogni $n \geq 5$ abbiamo $1 + \frac{n-1}{n^2} \notin I$.

Esercizio 3.
Mostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k2^k = (n-2)2^n + 2.$$

base Per $n = 0$ abbiamo

$$\sum_{k=0}^{-1} k2^k = 0, \qquad (0-2)2^0 + 2 = -2 + 2 = 0.$$

passo

$$\sum_{k=0}^{m} k2^k = m2^m + \sum_{k=0}^{m-1} k2^k \overset{h.i.}{=} m2^m + (m-2)2^m + 2 =$$
$$= (2m-2)2^m + 2 = (m-1)2^{m+1} + 2 = (m+1-2)2^{m+1} + 2$$

che mostra appunto il passo.

Esercizio 4.
Dare la definizione di estremo superiore di un insieme.
Dimostrarne quindi il teorema di esistenza per sottoinsiemi superiormente limitati dei reali, dato l'assioma di continuità di Dedekind.

La dimostrazione può essere trovata in un qualunque libro di analisi.

Esercizio 5 (facoltativo)**.**
Mostrare che, per $A, B \subseteq \mathbb{R}$, si ha $\mathcal{D}(A \cup B) = \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$, dove $\mathcal{D}(S)$ è l'insieme dei punti di accumulazione di S.

Dimostrazione. Mostriamo le due inclusioni:

$\supseteq$: dato $x \in \mathcal{D}(A)$ allora per ogni $\varepsilon > 0 : \exists a \in A \mid a \in I(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$. Ma $A \subseteq A \cup B$, quindi $a \in A \cup B$, per cui x soddisfa la definizione per poter dire $x \in \mathcal{D}(A \cup B)$. Analogamente scegliendo $x \in \mathcal{D}(B)$, per cui si può concludere $\mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(A \cup B)$.

$\subseteq$: sia $x \in \mathcal{D}(A \cup B)$. Se mostriamo che supponendo $x \notin \mathcal{D}(A)$ si ha $x \in \mathcal{D}(B)$ si ottiene quanto voluto (in generale la proposizione $P \vee Q$, ovvero "P o Q", è equivalente a $\neg P \Rightarrow Q$, ovvero "non P implica Q"). Quindi: supponiamo $x \notin \mathcal{D}(A)$, ovvero

$$\exists r > 0 \mid \forall a \in A : \, a \notin I(x, r) \setminus \{x\}. \tag{1}$$

Abbiamo però $x \in \mathcal{D}(A \cup B)$:

$$\forall \varepsilon > 0 : \, \exists c_\varepsilon \in A \cup B \mid c_\varepsilon \in I(x, \varepsilon) \setminus \{x\}.$$

Quando $\varepsilon \leq r$, per cui $I(x, \varepsilon) \subseteq I(x, r)$, per non andare in contraddizione con la (1), abbiamo necessariamente $c_\varepsilon \notin A$, per cui $c_\varepsilon \in B$. In definitiva, qualunque sia $\varepsilon > 0$:

- se $\varepsilon > r$, possiamo scegliere $c_r \in B$, per cui vale $c_r \in I(x,r) \setminus \{x\} \subseteq I(x,\varepsilon) \setminus \{x\}$;
- se $\varepsilon \leq r$ possiamo scegliere $c_\varepsilon \in B$, per cui vale direttamente $c_\varepsilon \in I(x,\varepsilon) \setminus \{x\}$.

Possiamo quindi conlcudere che $x \in \mathcal{D}(B)$.

$\square$