# AM1 – APPELLO X
## 11/09/2008 - Soluzioni

---

**Esercizio 1.**

Trovare estremo superiore e inferiore del seguente insieme.

$$S := \left\{ \sqrt[n^2+1]{\mathrm{e}} \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

provando i risultati trovati.

Innanzitutto $\sqrt[n^2+1]{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2+1}}$. Si possono utilizzare due metodi.

- Mostriamo che $a_n := \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2+1}}$ è una successione decrescente.

$$a_n \geq a_{n+1} \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2+1}} \geq \mathrm{e}^{\frac{1}{(n+1)^2+1}} \iff \frac{1}{n^2+1} \geq \frac{1}{n^2+2n+2} \iff$$
$$\iff n^2+1 \leq n^2+2n+2 \iff 0 \leq 2n+1$$

  che è sempre vero.

  Quindi $\max S = a_0 = \mathrm{e}$ e

$$\inf S = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2+1}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

- Mostriamo che $\max S = \mathrm{e}$.

  - È maggiorante:

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2+1}} \leq \mathrm{e} \iff \frac{1}{n^2+1} \leq 1 \iff n^2+1 \geq 1 \iff n^2 \geq 0$$

    che è sempre vero.

    È dentro all'insieme:

$$n = 0 \implies \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2+1}} = \mathrm{e}.$$

- Mostriamo che $\inf S = 1$.

  - È minorante, in quanto

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2+1}} \geq 1 \iff \frac{1}{n^2+1} \geq 0 \iff n^2+1 \geq 0$$

    che è sempre vero.

    È il massimo dei minoranti: per ogni $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2+1}} < 1+\varepsilon \iff \frac{1}{n^2+1} < \log(1+\varepsilon) \iff n^2+1 \geq \frac{1}{\log(1+\varepsilon)}$$

    che è vero per $n > \sqrt{\frac{1}{\log(1+\varepsilon)} - 1}$, che esiste per Archimede.

**Esercizio 2.**

Trovare i punti di accumulazione del seguente insieme.

$$T = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \frac{2n-1}{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determinare se $T$ è aperto, chiuso o nessuno dei due.

$\mathcal{D}(T) = \{2, -2\}$. Infatti

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \frac{2n-1}{n+3} = \begin{cases} 2 - \frac{7}{4k+3} & \text{se } n = 4k, \\ 0 & \text{se } n = 2k+1, \\ -2 + \frac{7}{4k+5} & \text{se } n = 4k+2. \end{cases}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ cerchiamo un $x \in T$, $x \neq 2$ tale che $|x-2| < \varepsilon$. Lo cerchiamo per $n = 4k$:

$$\left| 2 - \frac{7}{4k+3} - 2 \right| = -\frac{7}{4k+3} < \varepsilon \iff k > \frac{7}{4\varepsilon} - \frac{3}{4},$$

per cui tale $x$ esiste.

Analogamente, per ogni $\varepsilon > 0$ cerchiamo un $x \in T$, $x \neq -2$ tale che $|x+2| < \varepsilon$. Lo cerchiamo per $n = 4k+2$:

$$\left| -2 + \frac{7}{4k+5} + 2 \right| = \frac{7}{4k+5} < \varepsilon \iff k > \frac{7}{4\varepsilon} - \frac{5}{4},$$

e quindi tale $x$ esiste.

Da notare che 0 non è punto di accumulazione perché non esistono $x \in T$ *diversi* da 0 nei suoi intorni arbitrariamente piccoli.

$T$ non è chiuso perché ad esempio $2 \notin T$. Non è nemmeno aperto perché contiene un punto isolato (ad esempio 0).

---

**Esercizio 3.**

Calcolare i seguenti limiti, specificando i passaggi e i limiti notevoli usati.

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 \sin\frac{n+1}{n^3+3} + \sqrt{n}\sin n}{1 + n\log\left(\frac{n-3}{n+2}\right)}, \qquad \text{b)} \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 \left( \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} - \cos\frac{1}{n} \right).$$

a)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 \sin\frac{n+1}{n^3+3} + \sqrt{n}\sin n}{1 + n^3\log\left(\frac{n-3}{n+2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 \cdot \frac{n+1}{n^3+3} \cdot \frac{n^3+3}{n+1} \sin\frac{n+1}{n^3+3} + \sqrt{n}\sin n}{1 - \frac{5n^3}{n+2}\left(-\frac{n+2}{5}\right)\log\left(1 - \frac{5}{n+2}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\frac{n^3+n}{n^3+3} \cdot 1 + \frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{5n}{n+2} \cdot 1\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+0}{0+5} = 0$$

dove si sono utilizzati i limiti notevoli $\lim_{n\to+\infty} n \sin\frac{1}{n} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ e dove per il teorema dei carabinieri

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0.$$

b)

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(n^2\left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right) + n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

dove si sono utilizzati i limiti notevoli

$$\lim_{n\to+\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

---

**Esercizio 4.**

Studiare il carattere delle seguenti serie.

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{k}} - \frac{1}{\tan\frac{1}{k}}\right), \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{k-2}{k+1}\right)^{k^2+1}.$$

a) Innanzitutto $\frac{1}{\sin\frac{1}{k}} - \frac{1}{\tan\frac{1}{k}} = \frac{1-\cos\frac{1}{k}}{\sin\frac{1}{k}}$. Faccio un confronto asintotico con $\frac{1}{k}$.

$$\lim_{k\to+\infty} k \cdot \frac{1-\cos\frac{1}{k}}{\sin\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2\left(1-\cos\frac{1}{k}\right)}{k\sin\frac{1}{k}} = \frac{1}{2},$$

per cui (limite finito e diverso da 0) la serie ha lo stesso carattere di $\sum\frac{1}{k}$ che diverge.

b) Il termine della serie è definitivamente positivo, quindi possiamo applicare il criterio asintotico della radice.

$$\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{k-2}{k+1}\right)^{k^2+1}} = \lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{3}{k+1}\right)^{\frac{k^2+1}{k}} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{3}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{-3}\cdot\frac{-3}{k+1}\cdot\frac{k^2+1}{k}} = e^{-3}$$

in quanto si ha il limite notevole $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ e inoltre

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{-3}{k+1}\cdot\frac{k^2+1}{k} = \lim_{k\to+\infty} -3\frac{1+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{1}{k}} = -3.$$

Visto che $e^{-3} < 1$ per il criterio asintotico della radice la serie converge.

**Esercizio 5.**

Determinare l'insieme di continuità della seguente funzione e classificarne le eventuali discontinuità al variare del paramentro $a$.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{a}{x}} + 1} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \mathrm{e}^{\frac{a}{x}} & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

Per $x \neq 0$ la funzione è continua in quanto composizione di funzioni continue. Per $x = 0$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{a}{x}} + 1} = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 0 \text{ (forma } 1/\infty), \\ \frac{1}{2} & \text{se } a = 0, \\ 1 & \text{se } a < 0, \end{cases}$$

e poi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{a}{x}} = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 0 \text{ (forma } 1/\infty), \\ 1 & \text{se } a = 0, \\ +\infty & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Quindi mettendo insieme:

**$a > 0$:** la funzione è continua anche in 0;

**$a = 0$:** la funzione ha una discontinuità di prima specie (a salto) in 0;

**$a > 0$:** la funzione ha una discontinuità di seconda specie in 0.