AM1 – APPELLO C
09/06/2008 - Soluzioni

Esercizio 1.

Trovare estremo superiore e inferiore del seguente insieme.

$$S := \left\{ \sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}} \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

provando i risultati trovati.

$\max S = 1$ e $\inf S = 0 \notin S$. Due metodi:

- $\max S = 1$ 1 è maggiorante, in quanto

$$\sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}} \leq 1 \iff \frac{n+1}{n^2+1} \leq 1 \iff n+1 \leq n^2+1 \iff$$
$$\iff n^2 - n \geq 0 \iff n \leq 0 \vee n \geq 1$$

che accade sempre.

$1 \in S$, in quanto $\sqrt{\frac{0+1}{0^2+1}} = 1$.

$\inf S = 0$ 0 è minorante, in quanto

$$\sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}} \geq 0$$

accade sempre.

0 è il massimo dei minoranti, in quanto

$$\sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}} \leq \varepsilon \iff \frac{n+1}{n^2+1} \leq \varepsilon^2 \iff$$
$$\iff \frac{1}{\varepsilon^2}n + \frac{1}{\varepsilon^2} \leq n^2 + 1 \iff n^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}n + 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$$

che accade definitivamente, ad esempio per

$$n \geq \frac{1}{2\varepsilon^2} + \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^4} + \frac{1}{\varepsilon^2} - 1}.$$

- Mostriamo che la successione è decrescente:

$$\sqrt{\frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+1}} \leq \sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}} \iff \frac{n+2}{n^2+2n+2} \leq \frac{n+1}{n^2+1} \iff$$
$$\iff n^3 + 2n^2 + n + 2 \leq n^3 + 3n^2 + 4n + 2 \iff n^2 + 3n \geq 0$$

che accade sempre. Dal fatto che questa successione a_n è decrescente, si ottiene che

$$\begin{aligned}
&\max S = \max\{a_n\} = a_0 = 1,\\
&\inf S = \inf\{a_n\} = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}} = 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.

Calcolare il seguente limite, specificando i passaggi e i limiti notevoli usati.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)+n^{\frac{3}{2}}(1-\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{n}})}{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}+\log n}.$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)+n^{\frac{3}{2}}(1-\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{n}})}{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}+\log n} =\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\cdot n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)+n^{\frac{1}{2}}\cdot n\sin\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}(1-\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{n}})}{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}\cdot\frac{-2n^2}{n+1}}+\log n} =\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{2}+n^{\frac{1}{2}}\cdot 1\cdot 1}{\log n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\log n}\left(\frac{1}{2}+n^{-\frac{1}{2}}\right) = +\infty
\end{aligned}$$

Nel secondo passaggio sono stati usati i limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

In particolare per la potenza a denominatore:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-2n^2}{n+1} = -\infty$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}\cdot\frac{-2n^2}{n+1}} = 0$$

in quanto $\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x = 0$.

Esercizio 3.

Studiare il carattere delle seguenti serie.

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{k}+\frac{\pi}{2}\right)}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\sin^2 x - \sin x + 1)^k}{\sqrt{k+1}}.$$

Per la seconda specificare per quali x si ha convergenza semplice o assoluta.

a) Applichiamo un confronto asintotico con $\frac{1}{k}$.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{k}\right)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{k}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{k}\right)} =$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{k\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}} = 1,$$

Dove si sono usate le uguaglianze trigonometriche

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{k}\right) = -\sin\left(-\frac{1}{k}\right) = \sin\frac{1}{k}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{k}\right) = \cos\left(-\frac{1}{k}\right) = \cos\frac{1}{k}$$

e il limite notevole
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Quindi la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ che diverge.

b) La serie ha senso per $x > 0$. Calcoliamo il limite del valore assoluto del termine

$$\lim_{k\to+\infty} \left| \frac{(\log^2 x - \log x + 1)^k}{\sqrt{k+1}} \right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{|\log^2 x - \log x + 1|^k}{\sqrt{k+1}} =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{se } \left|\log^2 x - \log x + 1\right| \leq 1, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Risolviamo la disequazione

$$\log^2 x - \log x + 1 \geq -1 \wedge \log^2 x - \log x + 1 \leq 1$$

introducendo una variabile $y = \log x$.

$$y^2 - y + 1 \geq -1 \iff y^2 - y + 2 \geq 0$$

che accade sempre in quanto il discriminante è $1-8 \leq 0$.

$$y^2 - y + 1 \leq 1 \iff y^2 - y \leq 0 \iff 0 \leq y \leq 1.$$

Quindi per $\log x < 0 \vee \log x > 1$ (sse $x < 1 \vee x > \mathrm{e}$), la serie diverge per il criterio di Cauchy.

Applichiamo il criterio della radice alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{|\log^2 x - \log x + 1|^k}{\sqrt{k+1}}} = \left|\log^2 x - \log x + 1\right|.$$

Quindi per $\left|\log^2 x - \log x + 1\right| < 1$ (sse $0 < \log x < 1$, sse $1 < x < \mathrm{e}$) la serie converge assolutamente.

Per i rimanenti punti: $\log x = 0 \vee \log x = 1$ (sse $x = 1 \vee x = \mathrm{e}$) allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log^2 x - \log x + 1)^k}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

che diverge.

In definitiva: La serie diverge per $x \in (0,1] \cup [\mathrm{e}, +\infty)$, e converge assolutamente altrimenti, per $x \in (1, \mathrm{e})$.

Esercizio 4.

Determinare massimo e minimo limite della seguente successione, provando i risultati trovati.

$$a_n := \frac{n-3}{n+1} \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right).$$

Innanzitutto $\frac{n-3}{n+1} = 1 - \frac{4}{n+1} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Notiamo che inoltre per $n = 0, 1, \dots$ abbiamo

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right) = 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \dots$$

ovvero

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 3k, \\ -\frac{1}{2} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi, mostriamo che $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$:

- abbiamo la sottosuccessione

$$a_{3k} = \left(1 - \frac{4}{3k+1}\right) \cos(2k\pi) = 1 - \frac{4}{3k+1} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1;$$

- per ogni n

$$a_n = \left(1 - \frac{4}{n+1}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \leq 1 - \frac{4}{n+1} \leq 1 < 1 + \varepsilon$$

  per ogni $\varepsilon > 0$.

Mostriamo che $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = -\frac{1}{2}$:

- abbiamo la sottosuccessione

$$a_{3k+1} = \left(1 - \frac{4}{3k+2}\right)\cos\left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3k+2} \xrightarrow{n\to+\infty} -\frac{1}{2}$$

  (si può anche scegliere a_{3k+2});

- per ogni n

$$a_n = \left(1 - \frac{4}{n+1}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \geq -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{n+1}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{2}{n+1} \geq -\frac{1}{2} > -\frac{1}{2} - \varepsilon$$

  per ogni $\varepsilon > 0$.

Esercizio 5.

Determinare l'insieme di continuità della seguente funzione e classificarne le eventuali discontinuità.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{\sin(\pi x)} & \text{se } x \notin \mathbb{Z}, \\ \dfrac{2}{\pi} & \text{se } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Per $x \notin \mathbb{Z}$ abbiamo $\sin(\pi x) \neq 0$, e avendo un quoziente di funzioni continue f è continua.

Per $x = k \in \mathbb{Z}$, calcoliamo il limite della funzione. Per $k \neq \pm 1$ non è una forma indeterminata, in quanto $k^2 - 1 \neq 0$, quindi:

$$k \neq \pm 1 : \quad \lim_{x\to k} \frac{x^2-1}{\sin(\pi x)} = \infty$$

e si tratta di discontinuità di seconda specie (da notare che non ci interessiamo del segno, ci basta sapere che viene infinito in valore assoluto).

Per $k = 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sin(\pi x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\pi y(y+2)}{\sin(\pi y + \pi)} = \lim_{y\to 0} -\frac{y+2}{\pi} \cdot \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} = -\frac{2}{\pi}$$

dove abbiamo usato l'uguaglianza trigonometrica $\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$ e il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Si tratta quindi di una discontinuità di terza specie.

Procedendo analogamente per $k = -1$:

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sin(\pi x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\pi(y-2)y}{\sin(\pi y - \pi)} = \lim_{y\to 0} -\frac{y-2}{\pi} \cdot \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} = \frac{2}{\pi}$$

e quindi la funzione è continua.

In definitiva, la funzione è continua in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \cup \{-1\}$, discontinua di terza specie in 1, discontinua di seconda specie altrove.