AM1 – APPELLO B
11/02/2008 - Soluzioni

Esercizio 1.
Trovare estremo superiore e inferiore del seguente insieme.

$$S := \left\{ \log\left(1 + \log\left(\frac{n^2 + \mathrm{e}}{n^2+1}\right)\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

provando i risultati trovati.

$\inf S = 0$, $\sup S = \max S = \log 2$. Innanzitutto

$$\log\left(1 + \log\left(\frac{n^2 + \mathrm{e}}{n^2+1}\right)\right) = \log\left(1 + \log\left(1 + \frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1}\right)\right)$$

Due metodi:

- Mostriamo che $\max S = \log 2$.

  $\log 2 \in S$ in quanto per $n = 0$ si ha

  $$\log\left(1 + \log\left(1 + \frac{\mathrm{e}-1}{0^2+1}\right)\right) = \log(1 + \log(\mathrm{e})) = \log 2.$$

  Inoltre:

  $$\log\left(1 + \log\left(1 + \frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1}\right)\right) \leq \log 2 \iff$$
  $$\iff \log\left(1 + \frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1}\right) \leq 2 - 1 = 1 \iff$$
  $$\iff 1 + \frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1} \leq \mathrm{e} \iff \frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1} \leq \mathrm{e} - 1 \iff n^2 + 1 \geq 1 \iff n^2 \geq 0$$

  che è sempre vero.

  Mostriamo che $\inf S = 0$.

  0 è minorante:

  $$\log\left(1 + \log\left(1 + \frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1}\right)\right) \geq 0 \iff$$
  $$\iff 1 + \log\left(1 + \frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1}\right) \geq 1 \iff \log\left(1 + \frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1}\right) \geq 0 \iff$$
  $$\iff 1 + \frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1} \geq 1 \iff \frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1} \geq 0 \iff n^2 + 1 \geq 0$$

che è sempre vero. Inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$, cerchiamo un n tale che

$$\log\left(1+\log\left(1+\frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1}\right)\right) < 0+\varepsilon \iff$$
$$\iff \log\left(1+\frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1}\right) < \mathrm{e}^{\varepsilon}-1 \iff$$
$$\iff \frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1} < \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\varepsilon}-1}-1 \iff n^2+1 > \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\varepsilon}-1}-1} \iff$$
$$\iff n > \sqrt{\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\varepsilon}-1}-1}-1},$$

e tale n esiste.

- Mostriamo che $a_n = \log\left(1+\log\left(1+\frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1}\right)\right)$ è una successione decrescente.

$$a_{n+1} < a_n \iff \log\left(1+\log\left(1+\frac{\mathrm{e}-1}{(n+1)^2+1}\right)\right) < \log\left(1+\log\left(1+\frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1}\right)\right) \iff$$
$$\iff \frac{\mathrm{e}-1}{(n+1)^2+1} < \frac{\mathrm{e}-1}{n^2+1} \iff (n+1)^2 > n^2$$

che è sempre vero. Quindi, essendo $S = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, con a_n decrescente, si ha

$$\max S = a_0 = \log 2, \qquad \inf S = \lim_{n\to+\infty} a_n = \log(1+\log(1+0)) = 0.$$

Esercizio 2.
Determinare i punti di accumulazione del seguente insieme.

$$S := \left\{ \frac{n-1}{n+1} + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Mostrare che $x = -1$ è punto isolato per S.

Sia $a_n := \frac{n-1}{n+1} + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$. Innanzitutto $\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$ e

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2h, \\ 1 & \text{se } n = 4h+1, \\ -1 & \text{se } n = 4h+3. \end{cases}$$

Mostriamo che $\mathcal{D}(S) = \{0, 1, 2\}$.
Per 0: per ogni $\varepsilon > 0$, cerchiamo n tale che, con $a_n \neq 0$, $|a_n| < \varepsilon$. Per $n = 4h+3$ si ha

$$|a_{4h+3}| = \left|1 - \frac{2}{4h+4} - 1\right| = \frac{2}{4h+4} < \varepsilon \iff h > \frac{1}{2\varepsilon} - 1,$$

e un tale h (e quindi un tale n) esiste.
Per 1: per $n = 2h$ si ha

$$|a_{2h} - 1| = \left|1 - \frac{2}{2h+1} + 0 - 1\right| = \frac{2}{2h+1} < \varepsilon \iff h > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2},$$

e un tale h esiste.
Per 2: per $n = 4h + 1$ si ha

$$|a_{4h+1} - 2| = \left|1 - \frac{2}{4h+2} + 1 - 2\right| = \frac{2}{4h+2} < \varepsilon \iff h > \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2},$$

e un tale h esiste.

Esercizio 3.
Calcolare i seguenti limiti, specificando i passaggi e i limiti notevoli usati.

$$\lim_{n\to+\infty} n \sin(\sqrt{n^2-1} - n), \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{n^2+2n-1}{n^2+1}\right)}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1},$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n \sin(\sqrt{n^2-1} - n) &= \lim_{n\to+\infty} n \sin\left((\sqrt{n^2-1} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2-1}+n}{\sqrt{n^2-1}+n}\right) = \\ &= \lim_{n\to+\infty} n \sin\left(\frac{n^2-1-n^2}{\sqrt{n^2-1}+n}\right) = \\ &= \lim_{n\to+\infty} -n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n} (\sqrt{n^2-1}+n) \sin\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} -\frac{n}{n(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1)} \cdot 1 = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il limite notevole $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{n^2+2n-1}{n^2+1}\right)}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{2n-2}{n^2+1}\right)}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{2n-2}{n^2+1}\right)}{\frac{2n-2}{n^2+1}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1} \cdot \frac{n^2+1}{n^2(2n-2)} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{2}{n}} = 0,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato i limiti notevoli $\lim_{x\to0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}$.

Esercizio 4.
Studiare il carattere delle seguenti serie.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{100+\sqrt{k}}{\sqrt{k}+2k} \log\left(1+\sin\frac{1}{k}\right), \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x^2-2x-1)^k}{\sqrt{k+1}}.$$

Per la seconda specificare per quali x si ha convergenza semplice o assoluta.

Per la prima serie due metodi:

- Definitivamente $100 \leq \sqrt{k}$ e inoltre per ogni $z \geq 0$ si ha sia $\log(1+z) \leq z$, sia $\sin z \leq z$, per cui

$$\frac{100+\sqrt{k}}{\sqrt{k}+2k} \log\left(1+\sin\frac{1}{k}\right) \leq \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k}}{0+2k} \log\left(1+\sqrt{1}k\right) \leq \frac{\sqrt{k}}{k}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}.$$

  Quindi, visto che $\sum \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ converge, per il criterio del confronto converge anche la serie presa in esame.

- Confrontiamo asintoticamente con $\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{k\sqrt{k}}$.

$$\lim_{n\to+\infty}[k] k\sqrt{k}\frac{100+\sqrt{k}}{\sqrt{k}+2k} \log\left(1+\sin\frac{1}{k}\right) = k\sqrt{k}\frac{\sqrt{k}\left(\frac{100}{\sqrt{k}}+1\right)}{k\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+2\right)} \log\left(1+\frac{1}{k}\cdot k\sin\frac{1}{k}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}k\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2},$$

  dove si sono utilizzati i limiti notevoli $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Per il criterio del confronto asintotico, la serie converge se e solo se converge $\sum \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$, che converge.

  Per la seconda serie: applichiamo il criterio di Cauchy, per cui

$$\lim_{n\to+\infty}[k] a_k \neq 0 \implies \sum a_k \text{ diverge},$$

  ricordandosi che $\lim_{n\to+\infty}[k] a_k = 0 \iff \lim_{n\to+\infty}[k]\left|a\right|_k = 0$. Ora

$$\lim_{n\to+\infty}[k]\left|a_k\right| = \lim_{n\to+\infty}[k]\frac{\left|x^2-2x-1\right|^k}{\sqrt{k+1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } |x^2-2x-1| \leq 1, \\ +\infty & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

  La condizione $|x^2-2x-1| \leq 1$ è equivalente a chiedere sia $x^2-2x-1 \leq 1$ e $x^2-2x-1 \geq -1$. La prima è

$$x^2-2x-2 \leq 0 \iff \frac{2-\sqrt{4+8}}{2} \leq x \leq \frac{2+\sqrt{4+8}}{2} \iff 1-\sqrt{3} \leq x \leq 1+\sqrt{3},$$

mentre la seconda è
$$x^2 - 2x \geq 0 \iff x \leq 0 \vee x \geq 2.$$
Intersecando le due si ottiene
$$1 - \sqrt{3} \leq x \leq 0 \vee 2 \leq x \leq 1 + \sqrt{3}.$$
Quindi, certamente per l'opposto, ovvero
$$x < 1 - \sqrt{3} \vee 0 < x < 2 \vee x > 1 + \sqrt{3}$$
la serie diverge per il criterio di Cauchy. Altrimenti, applichiamo il criterio della radice per vedere se la serie converge *assolutamente* (quindi lo applichiamo al modulo).
$$\lim_{n\to+\infty}[k]\sqrt[k]{\frac{\left|x^2-2x-1\right|^k}{\sqrt{k+1}}} = \lim_{n\to+\infty}[k]\left|x^2-2x-1\right|\frac{1}{\sqrt[2k]{k+1}} = \left|x^2-2x-1\right|.$$
Quando quindi $|x^2 - 2x - 1| < 1$, ovvero (prendendo come strette le disuguaglianze di sopra):
$$1 - \sqrt{3} < x < 0 \vee 2 < x < 1 + \sqrt{3}$$
le serie converge assolutamente (e quindi anche semplicemente). Restano da controllare i punti $x = 1 \pm \sqrt{3}$, $x = 0$ e $x = 2$, che possiamo sostituire.

Per $x = 1 \pm \sqrt{3}$ si ha
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x^2-2x-1)^k}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
che diverge (ad esempio confrontando asintoticamente con $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Per $x = 0$ o $x = 2$ si ha
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x^2-2x-1)^k}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$$
che converge per il criterio di Leibniz, in quanto $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ decresce tendendo a 0, ma non converge assolutamente (come l'altro caso).

Esercizio 5.

Determinare l'insieme di continuità della seguente funzione e classificarne le eventuali discontinuità al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.
$$f(x) := \begin{cases} e^{\frac{a}{x}} & \text{se } x > 0, \\ a + \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x < 0, \\ a + 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} a + \frac{\sin x}{x} = a + 1,$$

utilizzando il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{a}{x}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0, \\ 1 & \text{se } a = 0, \\ 0 & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Quindi se $a > 0$ si ha una discontinuità di seconda specie. Se $a = 0$ la funzione è continua, in quanto

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0).$$

Se $a < 0$ la funzione è continua se e solo se

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \iff a + 1 = 0,$$

ovvero se $a = -1$, mentre presenta una discontinuità di prima specie altrimenti.