AM1 – APPELLO A
14/01/2008 - Soluzioni

Esercizio 1.
Trovare estremo superiore e inferiore del seguente insieme.

$$S := \left\{ \frac{1}{e^z + 1} \mid z \in \mathbb{Z} \right\},$$

provando i risultati trovati.

Per z grande positivo, la successione tende a 0, per z grande negativo tende a 1. Ci sono due modi per mostrare che i due sono rispettivamente inf e sup.

- Mostriamo che $\inf S = 0$.
  - 0 è minorante:
  $$0 \leq \frac{1}{e^z + 1} \iff e^z + 1 \geq 0 \iff e^z \geq -1$$
  che è sempre vero ($e^z > 0$).
  - 0 è maggiore di ogni minorante: per ogni ε
  $$\frac{1}{e^z + 1} < 0 + \varepsilon \iff e^z + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff e^z > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$
  Se $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \leq 0$ la disuguaglianza è vero per ogni z. Altrimenti:
  $$e^z > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \iff z > \log\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$$
  e tale z esiste sempre (ad esempio $z = 1 + \left[\log\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right]$).

  Mostriamo che $\sup S = 1$.
  - 1 è maggiorante:
  $$1 \geq \frac{1}{e^z + 1} \iff e^z + 1 \geq 1 \iff e^z \geq 0$$
  che è sempre vero ($e^z > 0$).
  - 1 è minore di ogni maggiorante: per ogni ε
  $$\frac{1}{e^z + 1} > 1 - \varepsilon,$$
  se $1 - \varepsilon \leq 0$ la disuguaglianza è vera per ogni z, altrimenti:
  $$\frac{1}{e^z + 1} > 1 - \varepsilon \iff e^z + 1 < \frac{1}{1 - \varepsilon} \iff$$
  $$\iff e^z < \frac{1}{1 - \varepsilon} - 1 = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \iff z < \log\left(\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right),$$
  e tale z esiste sempre (ad esempio $z = -1 - \left[\log\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right]$).

- Possiamo invece utilizzare il risultato che per una successione a_n crescente si ha $\sup\{a_n\} = \lim_{n\to+\infty} a_n$ (e la variante simmetrica per le successioni decrescenti). È facile generalizzare: se a_z è una funzione da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ decrescente, allora $\inf\{a_z\} = \lim_{z\to+\infty} a_z$ e $\sup\{a_z\} = \lim_{z\to-\infty} a_z$[1].

  Qui mostriamo che $\frac{1}{\mathrm{e}^z+1}$ è decrescente:

$$\frac{1}{\mathrm{e}^z+1} - \frac{1}{\mathrm{e}^{z+1}+1} > 0 \iff \frac{\mathrm{e}^{z+1}+1-\mathrm{e}^z-1}{(\mathrm{e}^z+1)(\mathrm{e}^{z+1}+1)} > 0 \iff \mathrm{e}^z(\mathrm{e}-1) > 0 \iff \mathrm{e} > 1,$$

  che è sempre vero. Quindi

$$\inf S = \lim_{z\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^z+1} = 0, \qquad \sup S = \lim_{z\to-\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^z+1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

Esercizio 2.
Determinare se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono aperti o chiusi o nessuna delle due.

$$A := \big((-\infty, 2) \cap (0, +\infty)\big) \cup \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x \leq 0 \,\},$$

$$B := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n+1}, m\right).$$

Risolviamo $x^2 + x \leq 0$:

$$x^2 + x \leq 0 \iff x(x+1) \leq 0 \iff -1 \leq x \leq 0,$$

per cui $\{\, x \mid x^2 + x \,\} = [-1, 0]$. Quindi

$$A = (0, 2) \cup [-1, 0] = [-1, 2).$$

A quindi non è né aperto né chiuso. Non è aperto in quanto $I(-1, \varepsilon) \not\subseteq A$ per ogni ε, e non è chiuso in quanto $2 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $2 \notin A$.
Per B abbiamo innanzitutto

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n+1}, m\right) = [0, m),$$

[1] Questo perché

$$\sup\{a_z \mid z \in \mathbb{Z}\} = \sup\{a_{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to+\infty} a_{-n} = \lim_{z\to-\infty} a_z,$$

(a_{-n} è crescente), e

$$\inf\{a_z \mid z \in \mathbb{Z}\} = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{z\to+\infty} a_z.$$

in quanto per ogni n $-\frac{1}{n+1} < 0 < m$, mentre per ogni $x < 0$ esiste n tale che $x < -\frac{1}{n+1}$ (per cui x non è nell'insieme). Ora

$$B = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} [0, m) = [0, +\infty),$$

in quanto per ogni $x \geq 0$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq x < m$. In definitiva B è chiuso. Infatti per ogni $y \notin B$, ovvero $y < 0$, l'intorno $I(y, -y) = (2y, 0)$ è tutto fuori B.

Esercizio 3.
Calcolare i seguenti limiti, specificando i passaggi e i limiti notevoli usati.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{-n} + \sqrt{n}\left(1 + \frac{7}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right)}{\cos n^3 + n^2 \sin \frac{3}{\sqrt{n}}}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n,$$

$$\textit{facoltativo:}\ \lim_{n\to+\infty} \{\sqrt{n^2 - n}\},$$

dove $\{x\}$ è la parte frazionaria di x.

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{-n} + \sqrt{n}\left(1 + \frac{7}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right)}{\cos n^3 + n^2 \sin \frac{3}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}\cdot 3^n} + \frac{1}{n} + \frac{7}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}\right)}{n\sqrt{n}\left(\frac{\cos n^3}{n\sqrt{n}} + 3\frac{\sqrt{n}}{3}\sin\frac{3}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{0+0+\frac{7}{1}}{0+3\cdot 1} = \frac{7}{3},$$

  dove abbiamo usato:

  - $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \implies \lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 1$;
  - $0 \xleftarrow{n\to+\infty} -\frac{1}{n\sqrt{n}} \leq \frac{\cos n^3}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, per cui $\frac{\cos n^3}{n\sqrt{n}} \to 0$ per il teorema dei carabinieri.
  - $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{3}\sin\frac{3}{\sqrt{n}} = 1$.

- $$\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - 1 + \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{-1+\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}\cdot n\left(-1+\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(-1+\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)},$$

  dove, visto che $\lim_{n\to+\infty} -1 + \cos\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, abbiamo utilizzato il limite notevole $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Ora calcoliamo il limite dell'esponente:

  $$\lim_{n\to+\infty} n\left(-1 + \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} -(\sqrt{n})^2\left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2},$$

utilizzando il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Quindi il limite della successione viene $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Un altro modo per risolvere questo limite è il seguente, che sfrutta il fatto che se $\cos x \geq 0$ (come accade per $\cos \frac{1}{\sqrt{n}}$) allora $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1-\sin^2\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(1-\sin^2\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{-\sin^2\frac{1}{\sqrt{n}}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}},$$

utilizzando i limiti notevoli $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ e $\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$.

- Mostriamo che definitivamente la parte intera $[\sqrt{n^2-n}] = n-1$. Per mostrare questo basta far vedere che definitivamente (in particolare per $n \geq 1$):

$$n-1 \leq \sqrt{n^2-n} < n \iff (n-1)^2 \leq n^2-n < n^2 \iff$$
$$\iff n^2-2n+1 \leq n^2-n < n^2 \iff -n+1 \leq 0 < n,$$

che è vero per $n > 0$. Quindi (ricordando che $\{x\} = x - [x]$):

$$\lim_{n\to+\infty}\{\sqrt{n^2-n}\} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2-n} - [\sqrt{n^2-n}] = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2-n} - (n-1) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n-(n-1)^2}{\sqrt{n^2-n}+n-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n\sqrt{1-\frac{1}{n}}+n-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 4.
Studiare il carattere delle seguenti serie.

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\log(k+1)+k^2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot k}\left(e^{\frac{1}{k^2}}-1\right), \qquad \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(e^x-2)^k}{k+1}.$$

Per la seconda specificare per quali x si ha convergenza semplice o assoluta.

- Svolgiamo in due modi, con il criterio del confronto e con quello asintotico. La serie comunque è a termini positivi.

  confronto: Utilizziamo $e^t - 1 \geq t$, $\sqrt{2} \leq \sqrt{3}\cdot k$ (definitivamente), e $\log(k+1) \geq 0$:

$$\frac{\log(k+1)+k^2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot k}\left(e^{\frac{1}{k^2}}-1\right) \geq \frac{k^2}{2\sqrt{3}\cdot k}\cdot\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}\cdot k}.$$

  Visto che $\sum \frac{1}{2\sqrt{3}\cdot k}$ diverge anche la serie presa in esame.

confronto asintotico: Confrontiamo con $\frac{1}{k}$:

$$\lim_{k\to+\infty} k\frac{\log(k+1)+k^2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot k}\left(e^{\frac{1}{k^2}}-1\right) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{\log(k+1)}{k^2}+1}{\frac{\sqrt{2}}{k}+\sqrt{3}} k^2\left(e^{\frac{1}{k^2}}-1\right) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

dove abbiamo usato il limite notevole $\lim_{n\to+\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1) = 1$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = 0$, che implica

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(k+1)}{k^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(k+1)}{(k+1)^2}\cdot\frac{k^2+2k+1}{k^2} = 0\cdot 1 = 0.$$

Per il criterio del confronto asintotico (abbiamo un limite finito e diverso da 0, per cui vale l'equivalenza), la serie diverge, in quanto $\sum \frac{1}{k}$ diverge.

- Facendo il limite del valore assoluto del termine (ricordiamo che $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ se e solo se $\lim_{k\to+\infty} |a_k| = 0$) otteniamo:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|e^x-2|^k}{k+1} = \begin{cases} 0 & \text{se } |e^x-2|\le 1, \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove

$$|e^x-2|\le 1 \iff -1\le e^x-2\le 1 \iff$$
$$\iff 1\le e^x\le 3 \iff 0\le x\le \log 3.$$

Il criterio di Cauchy ci indica dunque che la serie sicuramente diverge per $x<0$ o $x>\log 3$. Applichiamo il criterio della radice al valore assoluto per studiare la convergenza assoluta:

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{|e^x-2|^k}{k+1}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|e^x-2|}{\sqrt[k]{k}\cdot\sqrt[k]{1+\frac{1}{k}}} = |e^x-2|,$$

per cui abbiamo convergenza assoluta (e quindi anche semplice) per $0<x<\log 3$. I valori che ci restano li sostituiamo direttamente. Per $x=0$:

$$\sum \frac{(e^x-2)^k}{k+1} = \sum \frac{(-1)^k}{k+1},$$

che non converge assolutamente ma converge per il criterio di Leibniz. Per $x=\log 3$:

$$\sum \frac{(e^x-2)^k}{k+1} = \sum \frac{1}{k+1},$$

che diverge, in quanto $\frac{1}{k+1}\ge\frac{1}{2k}$ con $\sum\frac{1}{2k}$ divergente.

Esercizio 5.
Determinare l'insieme di continuità della seguente funzione e classificarne le eventuali discontinuità.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{|x|\,(1-\cos x)}{\sqrt{\log(1+x^6)}} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il denominatore $\sqrt{\log(1+x^6)}$ si annulla solo per $x = 0$ ed è sempre definito ($x^6 \geq 0$, quindi. Calcoliamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|\,(1-\cos x)}{\sqrt{\log(1+x^6)}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\,(1-\cos x)}{|x|^3} \sqrt{\frac{x^6}{\log(1+x^6)}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \sqrt{\frac{1}{1}} = \frac{1}{2} \neq 1 = f(0),$$

dove abbiamo utilizzato i limiti notevoli $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. La funzione quindi ha in 0 una discontinuità di terza specie, eliminabile.