

Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica  
Tutorato di AM1 - A.A. 2007/2008  
Tutore: Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.12 del 21/12/2007

**Esercizio 1.** Dire se convergono le seguenti serie:

- 1)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+2}$  e quindi converge per Leibniz.
- 2)  $\frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n^2} = b_n$  e  $\sum b_n$  è una serie armonica generalizzata convergente e quindi per il confronto converge anche  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$ .
- 3) Notare che  $\ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \leq \frac{1}{n^3}$ , quindi  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$  converge.
- 4) Applicate il criterio del rapporto, si ha che  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{3n}{n}}$  converge.
- 5) Si ha che  $n! < n^n$  e quindi  $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n}$  e quindi  $\sum_{n=1}^{+\infty} (n!)^{-\frac{1}{n}}$  diverge.
- 6)  $n + e^n < 2e^n$  e quindi  $a_n = \frac{n+e^n}{n!} < \frac{2e^n}{n!} = b_n$  e  $\sum b_n$  converge (lo si può vedere applicando il criterio del rapporto) e quindi converge anche  $\sum a_n$ .

**Esercizio 2.** Dire per quali  $x \in \mathbb{R}$  convergono le seguenti serie:

- 1) Valutiamo la convergenza assoluta della serie.  $e^{-n} |\sin(n!x)| \leq e^{-n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-n} = 0$ , quindi  $n^2 e^{-n} \leq 1$  per  $n$  grande, ovvero  $e^{-n} \leq \frac{1}{n^2}$ , quindi  $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \sin(n!x)$  converge assolutamente e quindi converge  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- 2)  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{x^n}$  non converge mai.
- 3)  $x \neq 0$ ,  $\begin{cases} x > 0 & \text{non converge} \\ x < 0 & \text{converge} \end{cases}$
- 4)  $x \neq -1$ ,  $\begin{cases} x > 1 & \text{converge} \\ x < -1 & \text{converge} \\ -1 < x \leq 1 & \text{non converge} \end{cases}$