Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2007/2008
Tutore: Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.11 del 19/12/2007

Esercizio 1. Studiare la convergenza delle seguenti successioni al variare del parametro (anche eventuali $\limsup$ e $\liminf$):

1) Si ha che se $x = 0$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; altrimenti se $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+xn^2}{x+n} = +\infty$; se $x < 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+xn^2}{x+n} = -\infty$.

2) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+xn^2}{x-n^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

3) $$x \neq -1, \ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{x+1}} = \begin{cases} \nexists & \text{se } x < -1 \\ 1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

4) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{xn}}{n^2-2} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ +\infty & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

5) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n-1}{2^{xn}} = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \\ -\infty & \text{se } -1 < x < 0 \\ \limsup_{n\to+\infty} = 0 & \text{se } x = -1 \\ \liminf_{n\to+\infty} = -\infty & \text{se } x = -1 \\ \limsup_{n\to+\infty} = +\infty & \text{se } x < -1 \\ \liminf_{n\to+\infty} = -\infty & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

6) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n-1}{2^n} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \\ 0 & \text{se } -2 < x < 0 \\ \limsup_{n\to+\infty} = 1 & \text{se } x = -2 \\ \liminf_{n\to+\infty} = -1 & \text{se } x = -2 \\ +\infty & \text{se } x > 2 \\ \limsup_{n\to+\infty} = +\infty & \text{se } x < -2 \\ \liminf_{n\to+\infty} = -\infty & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

Esercizio 2. Trovare estremo superiore ed estremo inferiore dei seguenti insiemi, dire se sono, rispettivamente, massimo e minimo:

1) Sappiamo che $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; consideriamo $x = \frac{\pi}{4}$, se $n = 2$ abbiamo che $\sin(nx) = 1$, se $n = 6$ $\sin(nx) = -1$, quindi $\sup A = \max A = 1$ e $\inf A = \min A = -1$.

2) $\sup B = 1$, $\inf B = -1$.

3) Sappiamo che per $|x| \leqslant 1,\ x \neq 0$ la serie non converge e quindi $\sup C = +\infty$. Per $|x| > 1$ la serie converge e converge al valore $y = \frac{|x|}{|x|-1}$, quindi non dobbiamo far altro che calcolare l'estremo inferiore dell'insieme $Y = \left\{y | y = \frac{|x|}{|x|-1},\ |x| > 1\right\}$ ed è $\inf Y = 1$, quindi $\inf C = 1$.

4) $\sup D = +\infty$, $\inf D = 0$.