Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2007/2008
Tutore: Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.10 del 18/12/2007

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

1) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4 - 3x^3 + x - 6}{3x^2 - 1} = +\infty$

2) $\displaystyle \lim_{x\to0} \frac{x^5 + 4x^2}{x^3 - 2x} = 0$

3) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}\sin\frac{1}{x^2+1} = 0$

4) $\displaystyle \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$

5) $\displaystyle \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+\frac{x^2}{2})}{x} = 0$

6) $\displaystyle \lim_{x\to0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} = 2$

Esercizio 2. Dire se sono continue le seguenti funzioni:

1) $f(x)$ è continua.

2) $f(x)$ non è continua.

3) $f(x)$ non è continua.

4) $f(x)$ è continua.

Esercizio 3. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ convergono le seguenti serie:

1) Abbiamo che $1+|x|^{2n} > |x|^{2n}$, quindi $a_n = \frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}} < \frac{1}{|x|^n} = b_n$, la serie $\sum b_n$ è una serie geometrica che converge se $|x| > 1$ ovvero se $x < -1 \;\vee\; x > 1$, quindi per il criterio del confronto converge anche $\sum a_n$. Abbiamo anche che $1+|x|^{2n} > 1$ e quindi $a_n = \frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}} < |x|^n = c_n$ e la serie $\sum c_n$ converge se $|x| < 1$ ovvero se $-1 < x < 1$ e per il criterio del confronto converge anche $\sum a_n$. Infine se $x = \pm 1$ $\displaystyle \sum a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}$ che diverge poiché non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza $a_n \to 0$.

2) $$\begin{cases} |x| > 1 & \text{non converge} \\ |x| = 1 & \text{converge (somma di 0)} \\ |x| < 1 & \text{converge} \end{cases}$$

3) $\begin{cases} |x| > 1 & \text{non converge} \\ |x| = 1 & \text{non converge} \\ |x| < 1 & \text{converge} \end{cases}$

4) Se $x = 0$ abbiamo che $a_n = 1$ e quindi la serie non converge. Si ha che $1 + n|x| > n|x|$ e quindi $a_n = \left(\frac{1+|x|}{1+n|x|}\right)^n < \left(\frac{1+|x|}{n|x|}\right)^n = \left(\frac{1}{n|x|} + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n^n}\left(\frac{1}{|x|} + 1\right)^n = b_n$ e $\sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{|x|} + 1\right) \to 0$, quindi $\sum b_n$ converge $\forall\, x \neq 0$ e di conseguenza anche $\sum a_n$ converge $\forall\, x \neq 0$ per il criterio del confronto.