Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2007/2008
Tutore: Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.9 del 11/12/2007

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

1) $\sqrt[n]{2n^5+1} = \sqrt[n]{n}^5 \sqrt[n]{2+\frac{1}{n^5}}$, quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n^5+1} = 1$.

2) Moltiplicate numeratore e denominatore per $\sqrt{n+1}+n\sqrt{n-1}$, studiando poi il grado si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1}-n\sqrt{n-1})\sqrt{n^3+1} = -\infty$.

3) Possiamo dividere numeratore e denominatore per $(n+1)^5$ e si ha $\frac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5+(n-1)^5} = \frac{\frac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5}}{1+\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5}$, il denominatore tende a 2, sviluppando $(n+1)^6-(n-1)^6$ si ha (al numeratore) $\frac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5} = \frac{12n^5+40n^3+12n}{(n+1)^5}$ e quindi il numeratore tende a 12; quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5+(n-1)^5} = 6$.

4) Abbiamo che $0 < \frac{\sqrt[2n]{n!}}{n} = \sqrt[2n]{\frac{n!}{n^{2n}}} = \sqrt[2n]{1\big(1-\frac{1}{n}\big)\big(1-\frac{2}{n}\big)\cdots\frac{2}{n}\frac{1}{n}}\sqrt[2n]{\frac{1}{n^n}} \leqslant \sqrt[2n]{2^n}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$, quindi per il teorema dei carabinieri $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[2n]{n!}}{n} = 0$.

5) Considerate $\big(\sqrt[3]{8+\sin 2^{1/n}}-2\big)$ e riscrivetelo come $(a-b) = \frac{(a^3-b^3)}{(a^2+2ab+b^2)}$, considerate che per n grande $\sin 2^{\frac{1}{n}} \in (\sin 1, \sin 1+\epsilon)$, quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\big(\sqrt[3]{8+\sin 2^{1/n}}-2\big) = +\infty$.

6) Rapporto di limiti notevoli, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3n+2}{n^2}} = 1$.

7) Sviluppate la potenza del binomio, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\big(1-\big(1-\frac{2}{n}\big)^4\big) = 8$.

8) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+n\sin n}{1+n^2+n} = 1$.

9) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}\frac{n}{n}} = 1.$$

10) $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{7}{n}\right)^{2n} = e^{14}.$$

11) $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n^2+n^4}\right)^{n} = 1.$$

Esercizio 2. Calcolare massimo limite e minimo limite delle seguenti successioni:

1) Notiamo che per n pari $a_{2n} = 2$, mentre per n dispari $a_{2n+1} = 0$; 2 è un maggiorante definitivo poiché $a_n \leqslant 2\ \forall\ n$ ed essendo un valore assunto dalla successione è anche il più piccolo dei maggioranti definitivi; analogamente 0 è un minorante definitivo poiché $a_n \geqslant 0\ \forall\ n$ ed essendo un valore assunto dalla successione è il più grande dei minoranti definitivi. Quindi $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 2$ e $\liminf_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2) Notiamo che per n pari si ha $a_{2n} = 2n$ e quindi la successione a_n non è limitata superiormente e quindi $\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Per n dispari si ha $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$: $x \leqslant 0$ è minorante definitivo perché $a_n \geqslant 0 \geqslant x\ \forall\ n$, poi nessun $x > 0$ è un minorante definitivo poiché abbiamo che se $x = \epsilon > 0$, $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} < \epsilon\ \forall\ n > \frac{1}{2\epsilon} - \frac{1}{2}$. Quindi $\liminf_{n\to+\infty} a_n = 0$.

3) $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to+\infty} a_n = 0$.

4) $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

5) $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -1$.

6) $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -1$.

Esercizio 3. Dire se convergono le seguenti serie:

1) Applichiamo il criterio del rapporto: si ha che $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \dfrac{n^n}{n!} = \dfrac{1}{e} < 1$, quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} < +\infty$.

2) $\frac{2^n+3^n}{5^n} = \frac{2^n+3^n}{\sqrt{2}^n\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^n}$ e $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+3^n}{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^n} = 0$, quindi $\frac{2^n+3^n}{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^n} < 1\ \forall n > \nu$ e $\frac{2^n+3^n}{5^n} < \frac{1}{\sqrt{2}^n}\ \forall n > \nu$. Quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$ converge per il criterio del confronto.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$ converge.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n^2}$ converge.

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{4^n}$ converge.

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^\beta a^{-n}$, $a > 1$ converge.