Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2007/2008
Tutore: Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.8 del 28/11/2007

Esercizio 1. Calcolare usando il teorema dei carabinieri:

1) Abbiamo $0 < \frac{n\log n}{n^2+1} < \frac{\sqrt{n}}{n+\frac{1}{n}}$ per n grande, la successione di destra ha limite 0, quindi $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\log n}{n^2+1} = 0$.

2) Abbiamo $\frac{2-n^2}{n+1} < \frac{2-n^2}{n}$, questa ha limite $-\infty$, quindi $\lim_{n\to+\infty} \frac{2-n^2}{n+1} = -\infty$.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{20}+4n^4+1}{n!} = 0$.

2) $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{\frac{n^2+2}{n^2}} - \sqrt{\frac{n-4}{n}}\right) = 2$.

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

4) Si ha $-\frac{n!}{n^n} \leqslant (-1)^n \frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{n!}{n^n}$, per i carabinieri $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n} = 0$.

5) $\left(n^{\sqrt{n}} - 2^n\right) = 2^n\left(\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n} - 1\right)$, sappiamo che $\frac{n}{2^{\sqrt{n}}} < \frac{1}{M}$ se $n > \bar{n}$ e quindi $2^n\left(\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n} - 1\right) < 2^n\left(\frac{1}{M^{\sqrt{n}}} - 1\right)$ per $n > \bar{n}$ e poiché quest'ultima successione tende a $-\infty$ si ha $\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\sqrt{n}} - 2^n\right) = -\infty$.

6) Abbiamo che $\frac{1}{\frac{\log 2}{3\log n}+1} = \frac{\log n^3}{\log 2n^3} < \frac{\log n^3}{\log(n^3+3n^2)} < \frac{3\log n}{3\log n} = 1$, poiché la prima successione tende a 1, per i carabinieri $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n^3}{\log(n^3+3n^2)} = 1$.

7) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n!}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!\frac{n}{n!}}$, sappiamo che $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!} = e$ e che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n!} = 0$, quindi $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n!}\right)^n = 1$.

8) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n^2+n^4}\right)^n = 1$.

9) Moltiplicate numeratore e denominatore per n^3, in questo modo al denominatore si ha un limite notevole che sappiamo tendere a $\frac{1}{2}$. Al numeratore abbiamo $n^3\big(\ln(1+n+n^3) - 3\ln n\big) = n^3 \ln\frac{1+n+n^3}{n^3} = \ln\left(\frac{1+n+n^3}{n^3}\right)^{n^3}$, abbiamo che $\left(\frac{1+n+n^3}{n^3}\right)^{n^3} > \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2 n}$, sappiamo che $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$ e quindi $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} = +\infty$ e per i carabinieri $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n+n^3)-3\ln n}{n\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)} = +\infty$.

10) Abbiamo che $2\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}} = 2\pi n\sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n^2}}$ e $1 < \sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n^2}} < 1+\frac{\sqrt{n}}{n^2}$ e per i carabinieri $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n^2}} = 1$ e quindi $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}}\right) = 0$.