Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2007/2008
Tutore: Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.7 del 23/11/2007

Esercizio 1. Verificare, usando la definizione, che:

1) Dobbiamo verificare che $\forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\nu \in \mathbb{R} :\ \forall\, n > \nu\ \left|\frac{c}{n} - L\right| = \left|\frac{c}{n}\right| < \epsilon$ e ciò si verifica non appena $n > \frac{|c|}{\epsilon}$.

2) Si verifica in maniera analoga ad 1).

3) Abbiamo, moltiplicando e dividendo per $n + \sqrt{n^2-1}$, che $\left|n - \sqrt{n^2-1}\right| = \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} < \frac{1}{n} < \epsilon$ se $n > \frac{1}{\epsilon}$.

4) Si ha: $\log_\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$ e quindi $\log_\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right) < \epsilon \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \alpha^\epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\alpha^\epsilon - 1}$.

5) $\left|\sqrt{\frac{n^2-\sin n}{3n^2+\log n}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{\left|\frac{n^2-\sin n}{3n^2+\log n} - \frac{1}{3}\right|}{\sqrt{\frac{n^2-\sin n}{3n^2+\log n}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} < \frac{\left|\frac{\log n + 3\sin n}{9n^2+3\log n}\right|}{\sqrt{\frac{n^2-1}{3n^2+n}}} < \frac{\frac{n+3}{9n^2}}{\sqrt{\frac{n^2-1}{4n^2}}} < \frac{n+3}{n\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{(n+3)^2}{n^3}} < \sqrt{\epsilon}$

se $\frac{(n+3)^2}{n^3} < \epsilon$, ovvero $\frac{n^2+6n+9}{n^3} \overset{(*)}{<} \frac{2n^2}{n^3} = \frac{2}{n} < \epsilon$ se $n > \frac{2}{\epsilon}$, $(*)$ è vero se $n > 8$, quindi $n > \max\left\{8, \frac{2}{\epsilon}\right\}$.

Esercizio 2. Calcolare usando il teorema dei carabinieri:

1) Abbiamo $0 < \frac{\log n}{n^2} < \frac{1}{n}$, la successione $a_n = 0$ ha come limite 0, anche la successione $c_n = \frac{1}{n}$ ha come limite 0, quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^2} = 0$.

2) Abbiamo $\frac{n}{n-2} < \frac{\sqrt{n^2+1}}{n-2} < \frac{n^2+1}{n^2-2n}$, la successione di sinistra ha limite 1, anche la successione di destra ha limite 1, quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n-2} = 1$.

3) Abbiamo $\frac{n^2\log n}{n^2+1} = \frac{\log n}{1+\frac{1}{n^2}} > \frac{\log n}{2}$ per $n > 2$, questa successione ha come limite $+\infty$, quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2\log n}{n^2+1} = +\infty$.

Esercizio 3. Basta mettere in evidenza al numeratore ed al denominatore della frazione n^a e n^b rispettivamente. Si avrà quindi

$$\frac{n^a}{n^b}\frac{p_a + \frac{p_{a-1}}{n} + \cdots + \frac{p_0}{n^a}}{q_b + \frac{q_{b-1}}{n} + \cdots + \frac{q_0}{n^b}}$$

da cui segue la tesi.

Esercizio 4. Calcolare i seguenti limiti:

1) Si ha $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$, quindi per i carabinieri si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

2) Utilizzando le formule di duplicazione per il coseno e dimostrando che $\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} = 0$, si ha che $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

3) Moltiplicate numeratore e denominatore per $\sqrt{n^2-4n}+\sqrt{n^3-3}$. Si ha che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{n^3-3}}{n^2+1} = 0$.

4) Mettete in evidenza al denominatore 4^n. Si ha che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{3^n-2^{2n}} = 0$.