Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2007/2008
Tutore: Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.6 del 16/11/2007

Esercizio 1. Dire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono aperti, chiusi, né aperti né chiusi:

- Possiamo notare che $A = \mathbb{R}$ e dire quindi che A è aperto e chiuso poiché $\mathbb{R}$ è sia aperto che chiuso (dimostratelo facendo vedere che $\mathbb{R}$ si può scrivere come unione numerabile di aperti e come unione finita di chiusi).
- Dobbiamo capire quali sono gli $x \in \mathbb{R} | x \in B$: gli intervalli $B_j = (-j, j]$ sono tali che $B_j \subset B_{j+1}$, quindi i punti che sono contenuti in tutti gli intervalli B_j sono gli $x \in \mathbb{R} | x \in B_1 = (-1, 1] \Rightarrow B = (-1, 1]$; ora proviamo che B non è né aperto né chiuso. Infatti ogni intorno di 1 è del tipo $I = (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ con $\epsilon > 0$ ma $L = \{x \in \mathbb{R} | x \in (1, \epsilon)\}$ è tale che $L \subset I$, $L \not\subset B$, quindi non è aperto. Se fosse chiuso B^C sarebbe aperto: ma $B^C = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$ e mentre $(1, +\infty)$ è aperto possiamo mostrare, analogamente a sopra, che $(-\infty, -1]$ non è aperto, quindi B^C non è aperto e, conseguentemente, B non è chiuso.
- $C = (0, 2)$ ed è aperto.
- Mostrate che $D = (0, 3]$ e fate vedere che $(0, 3]$ non è né aperto né chiuso.
- Mostrate che $E = \emptyset$, quindi E è sia aperto che chiuso (l'insieme vuoto è aperto e chiuso).
- Mostrate che $F = \{\pi\}$ e fate vedere che F è chiuso.
- Possiamo mostrare che $\forall j, k$ $G_{j,k} = \left(j - \frac{1}{k}, j + \frac{1}{k}\right)$ è aperto e quindi $G_j = \bigcap_{k=1}^{j} G_{j,k}$ è aperto perché intersezione finita di aperti e quindi $G = \bigcup_{j=1}^{+\infty} G_j$ è aperto in quanto unione numerabile di aperti.

Esercizio 2. Trovare i punti interni, i punti di frontiera e i punti di accumulazione dei seguenti insiemi, dire se sono aperti, chiusi, né aperti né chiusi.

- $\overset{\circ}{A} = (-\infty, 0)$, $\partial A = \{0\}$, $\mathcal{D}A = (-\infty, 0]$, si vede che A è chiuso essendo $\overline{A} = A \cup \mathcal{D}A = A$.
- $\overset{\circ}{B} = \emptyset$, $\partial B = B \cup \{0\}$, $\mathcal{D}B = \{0\}$, B non è né aperto né chiuso.
- $\overset{\circ}{C} = \emptyset$, $\partial C = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}C = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ non è né aperto né chiuso.

- $\overset{\circ}{D} = \emptyset$, $\partial D = D \cup \{0\}$, $\mathcal{D}D = \{0\}$, D non è né aperto né chiuso.

Esercizio 3. Verificare, usando la definizione, i seguenti limiti di funzioni:
Soluzione per il punto (a): $\left|\frac{x^2+4}{2x^2+3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{4x^2+6} < \frac{5}{x^2} < \epsilon$ se $x > \sqrt{\frac{5}{\epsilon}}$.