Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2007/2008
Tutore: Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.5 del 26/10/2007

Esercizio 1.

A) Possiamo notare che se $n \geqslant 2$ $\frac{2n+1}{n^2-2} > 0$, mentre per $n = 0$ $x = -\frac{1}{2}$ e per $n = 1$ $x = -3$, quindi $-3 \leqslant x$ $\forall x \in B \Rightarrow \inf B = \min\{x \in B\} = -3$.
Possiamo far vedere che gli elementi di B decrescono col crescere di n, $n \geqslant 2$ ovvero: $\frac{2n+1}{n^2-2} \geqslant \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2-2}$ $\forall n \geqslant 2$, quindi il valore di x per $n = 2$ è il valore massimo: $\sup B = \max\{x \in B\} = \frac{5}{2}$.

B) $\inf D = \min\{x \in D\} = \frac{1}{3}$, l'insieme non è superiormente limitato quindi è $\sup D = +\infty$: va quindi dimostrato che $\forall M$ $\exists x \in D : x > M$, ovvero $\forall M$ $\exists n : x_n > M$.

C) $\inf G = \min\{x \in G\} = -3$, $\sup G = \max\{x \in G\} = \frac{6}{7}$.

D) $\inf H = \min\{x \in H\} = 0$, $\sup H = +\infty$.

E) $\inf A = \min\{x \in A\} = \frac{1}{2}$, $\sup A = \frac{3}{2}$.

F) $\inf B = 0$, $\sup B = \max\{x \in B\} = 1$.

G) $\inf C = 1$, $\sup C = +\infty$.

Esercizio 2. Espressioni esplicite per il doppio fattoriale sono:

n dispari $\quad n(n-2)(n-4)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$
n pari $\quad n(n-2)(n-4)\cdots 4 \cdot 2$
Il risultato lo si può dimostrare per induzione.

Esercizio 3. Dire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono aperti, chiusi, né aperti né chiusi:

- È chiaro che $(0,1) \cup [1,2) = (0,2)$, quindi $\forall x \in A$ sia $r \leqslant \min\{d(x,0), d(x,2)\}$ allora è $I = (x-r, x+r) \subset A$ poiché $x - r \geqslant 0$ e $x + r \leqslant 2$, quindi A è aperto.

- È $(0,1) \cap \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, mostriamo che B^C è aperto: $B^C = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ e $\forall x \in B^C$ sia $r \leqslant \min\left\{d\left(x, \frac{1}{3}\right), d\left(x, \frac{1}{2}\right)\right\}$ allora è $I = (x-r, x+r) \subset B^C$, quindi B^C è aperto e di conseguenza B è chiuso perché complementare di un aperto.

- Mostriamo che $C = \mathbb{N}$: intuitivamente possiamo notare che fissato k abbiamo l'unione di intervalli centrati sui naturali e che all'aumentare di k il raggio di questi intervalli diminuisce, matematicamente sia $x \in \mathbb{R}$: se $x \leqslant -1$ $\nexists k, j : x \in \left(j - \frac{1}{k}, j + \frac{1}{k}\right)$, altrimenti $\exists!\ \bar{j} : x \in \left(\bar{j} - \frac{1}{2}, \bar{j} + \frac{1}{2}\right]$ $\exists \bar{k} > 2 : x \notin \left(\bar{j} - \frac{1}{\bar{k}}, \bar{j} + \frac{1}{\bar{k}}\right)$ e fissato $\bar{k}$ $x \notin \left(j - \frac{1}{\bar{k}}, j + \frac{1}{\bar{k}}\right)$ $\forall j$ e quindi x non è in una delle unioni e di conseguenza non è nell'intersezione. Quindi C è chiuso.

Esercizio 4. Trovare i punti interni, i punti di frontiera e i punti di accumulazione dei seguenti insiemi, dire se sono aperti, chiusi, né aperti né chiusi.

- Vediamo esplicitamente qual è l'insieme risolvendo la disequazione: otteniamo che $A = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 0\}$. Troviamo i punti interni: $\forall -1 < x < 0$ sia $\epsilon > 0 : \epsilon \leqslant \min\{d(x,-1), d(x,0)\} \Rightarrow I = (x-\epsilon, x+\epsilon) \subset A \Rightarrow \overset{\circ}{A} = A$, questo dimostra che A è aperto. Cerchiamo ora la frontiera di A: $\forall \epsilon > 0 \quad I = (-1-\epsilon, -1+\epsilon)$ contiene sia punti di A che di A^C, anche la famiglia di intorni circolari $J = (0-\epsilon, 0+\epsilon)$ $\forall \epsilon > 0$ contiene sempre punti di A e di A^C, quindi $\partial A = \{-1, 0\}$. Per quanto riguarda i punti d'accumulazione, ogni punto $\bar{x} \in \overset{\circ}{A}$ è d'accumulazione perché se così non fosse $\exists\ I : \ \forall x \in I \backslash \{\bar{x}\}\ x \in A^C$ ($\bar{x}$ è un punto isolato) $\Rightarrow$ ogni intorno di $\bar{x}$ conterrebbe punti di A^C e quindi $\bar{x} \in \partial A$ contro l'ipotesi. Facciamo vedere ora che anche -1 e 0 sono punti d'accumulazione. $\forall \epsilon > 0 \quad I = (-1-\epsilon, -1+\epsilon) : \ A \cap I \neq \emptyset$: infatti $\forall \ -1 < x < -1+\epsilon \in I$; $\forall \epsilon > 0 \quad J = (0-\epsilon, 0+\epsilon) : \ A \cap I \neq \emptyset$: infatti $\forall\ 0 - \epsilon < x < 0 \in I$; si vede facilmente che un punto di $\overset{\circ}{A^C}$ non può essere d'accumulazione (visto che esiste un intorno tutto contenuto in A^C che quindi non contiene punti di A), quindi $\mathcal{D}A = [-1, 0]$.

- $\overset{\circ}{B} = B$, $\partial B = \mathbb{N}^+$, $\mathcal{D}B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [2n-1, 2n]$, B è aperto essendo uguale al suo interno.