Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2007/2008
Tutore: Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.4 del 19/10/2007

Esercizio 1.
Mostro la risoluzione solo per il numero 1), gli altri si risolvono in maniera analoga.

- Dimostriamo che la relazione è vera per la base d'induzione $n = 1$ (non è detto che la base sia sempre questa, per esempio nell'esercizio 5) si usa, come base, $n = 6$): $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$.
- Assumiamola vera per n e dimostriamola per $n+1$:
$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k^1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{vale per } n}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2\left(\frac{n+2}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

Esercizio 2.
Lo dimostriamo per induzione:

- base $n = 1$: se $\sharp A = 1 \quad A = \{x\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, x\}$ e $\sharp\mathcal{P}(A) = 2 = 2^1$;
- vera per $n = N$: sia A un insieme con $N+1$ elementi e sia $\bar{x}$ uno qualsiasi di essi, sia $B = A \backslash \{\bar{x}\}$, sappiamo che $\sharp\mathcal{P}(B) = 2^N$, gli elementi di $\mathcal{P}(A)$ sono quelli di $\mathcal{P}(B)$ (che ha cardinalità 2^N) insieme a tutti i possibili sottoinsiemi di B a cui si aggiunge $\bar{x}$ (la cardinalità di questi sottoinsiemi è quindi 2^N), quindi $\sharp\mathcal{P}(A) = 2 \cdot 2^N = 2^{N+1}$.

Esercizio 3.

A) Notiamo che per $n = 0$ si ha $x = -\frac{3}{2}$, possiamo notare invece che per $n \geqslant 1$ $\frac{2n+3}{3n-2} > 0$, questo implica che $-\frac{3}{2} \leqslant x \ \forall x \in A$ e quindi poiché $-\frac{3}{2} \in A$ è $\inf A = \min\{x \in A\} = -\frac{3}{2}$.
Possiamo vedere che $\forall n \geqslant 1 \ x_n \geqslant x_{n+1}$, infatti: $\frac{2n+3}{3n-2} \geqslant \frac{2(n+1)+3}{3(n+1)-2} \ \forall n \geqslant 1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow 13 \geqslant 0 \ \forall n \geqslant 1$, questo ci dice che per $n = 1$ $x = 5$ è tale che $5 \geqslant x \ \forall x \in A$ ed è quindi $\sup A = \max\{x \in A\} = 5$.

B) Consideriamo separatamente gli elementi positivi e quelli negativi e cerchiamo l'estremo superiore tra i positivi, l'estremo inferiore tra i negativi. $\inf C = \min\{x \in C\} = -2$, $\sup C = \max\{x \in C\} = 1$.

C) $\sup E = \max\{x \in E\} = \frac{1}{4}$, $\inf E = \min\{x \in E\} = -\frac{1}{7}$.

D) $\inf F = \min\{x \in F\} = 0$, $\sup F = \max\{x \in F\} = \frac{3 \log 3}{10}$.

E) $\sup I = +\infty$, $\inf I = \min\{x \in I\} = -1$.

F) Si vede che per $m = 1$ e $n = 1$, $\frac{m}{2^n} = \frac{1}{2}$, quindi è $\inf D = \min\{x \in D\} = \frac{1}{2}$; diversamente, per quanto riguarda l'estremo superiore $\nexists\, m, n : \frac{m}{2^n} = \frac{2}{3}$, però se l'estremo superiore fosse $x < \frac{2}{3}$, allora considerando i punti $\frac{k}{2^n}$ con $k = 1, 2, \dots, 2^n$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{m}{2^n} < \frac{2}{3} < \frac{m+1}{2^n}$, risulta, quindi, che $0 < \frac{2}{3} - \frac{m}{2^n} < \frac{1}{2^n}$ e se $\frac{1}{2^n} < \frac{2}{3} - x \Leftrightarrow n > -log_2\left(\frac{2}{3} - x\right)$ si ha $\frac{2}{3} - \frac{m}{2^n} < \frac{2}{3} - x \Leftrightarrow x < \frac{m}{2^n}$ ed è $x < \frac{m}{2^n} < \frac{2}{3}$, quindi x non può essere un maggiorante e di conseguenza nessun $x < \frac{2}{3}$ lo è, questo implica che $\sup D = \frac{2}{3}$.