

Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2007/2008
Tutore: Nazareno Maroni

Tutorato n.4 del 19/10/2007

Esercizio 1. Con il principio d'induzione, dimostrare le seguenti:

$$1) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$2) \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

$$3) n! \geq 2^{n-1}$$

$$4) n^n \geq n!$$

$$5) 2^n > 10n \quad (n \geq 6)$$

$$6) 2^n \geq n^2 \quad (n \geq 4)$$

$$7) (1+a)^n \geq 1+na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 \quad a > 0$$

$$8) (1+a)^n \geq 1+na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3 \quad a \geq -1$$

Esercizio 2. Dimostrare che se A è un insieme con N elementi, $\mathcal{P}(A)$ ha 2^N elementi.

Esercizio 3. Trovare, se esistono, estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi, specificando se sono, rispettivamente, massimo e minimo.

$$- A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2n+3}{3n-2}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$- B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^n \frac{n+1}{2n-1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$- C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\cos(n\pi)}{3n+4}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$- D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n \log n}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

$$- E = \mathbb{N} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

$$- F = \left\{ x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right] \mid x = \frac{m}{2^n}, n, m \in \mathbb{N} \right\}$$