Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2007/2008
Tutore: Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.1 del 21/09/2007

1. Numeriche intere:
   a) Quella che abbiamo è una disequazione di secondo grado nell'incognita x. Troviamo gli zeri del polinomio, essi sono: $x_1 = -90$, $x_2 = 0$, studiando il segno si trova che il polinomio è positivo, $25(4x-1) + (x-5)^2 \geq 0$, nell'insieme $\{x \in \mathbb{R} | x \leq -90 \vee \ x \geq 0\}$.
   b) $\{x \in \mathbb{R} | x < -5 \ \vee \ x > 0\}$.
   c) $\left\{x \in \mathbb{R} | x < \frac{a-3}{a+3} \ \vee \ x > 1\right\}$, notare che $\frac{a-3}{a+3} < 1 \ \forall a > -3$.
2. Frazionarie:
   a) Studiamo la positività del numeratore, $n(x) = 5x^2 - 3x - 2 > 0$, e del denominatore, $d(x) = 3x^2 + 5x - 2 > 0$, traendo poi le conclusioni trovando gli intervalli in cui $n(x) > 0 \wedge d(x) > 0$ o $n(x) < 0 \wedge d(x) < 0$ perché nella disequazione c'è $>$, altrimenti avremmo dovuto trovare intervalli in cui $n(x)$ e $d(x)$ avevano segno opposto. Il denominatore **NON DEVE** annullarsi: $d(x) \neq 0$. Dobbiamo quindi studiare due disequazioni e valutare il segno della frazione. La soluzione è: $\left\{x \in \mathbb{R} | x < -2 \ \vee \ -\frac{2}{5} < x < \frac{1}{3} \ \vee \ x > 1\right\}$.
   b) $\left\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < \frac{1}{3} \ \vee \ x > 1 \ \wedge \ x \neq 2\right\}$.
   c) $\begin{cases} a > 0: & x < -2a \ \vee \ -a \leq x \leq \frac{8}{11}a \ \vee \ x > a \\ a = 0: & \forall x \neq 0 \\ a < 0: & x < a \ \vee \ \frac{8}{11}a \leq x \leq -a \ \vee \ x > -2a \end{cases}$
   d) Bisogna prestare attenzione all'esistenza delle radici: se abbiamo $\sqrt[n]{f(x)}$, se $n = 2k$ (n pari)$\Rightarrow$ deve essere $f(x) \geq 0$, se $n = 2k+1$ (n dispari) non ci sono restrizioni sul segno di $f(x)$. La soluzione è: $\{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 0\}$.
3. Moduli:
   a) Si discutono separatamente i casi in cui la funzione all'interno del modulo sia positiva o negativa: $|f(x)| \rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0: & |f(x)| = f(x) \\ f(x) < 0: & |f(x)| = -f(x) \end{cases}$. In questo caso abbiamo due moduli e dobbiamo trovare dove $f(x) = x - 4 \geq 0$ e $g(x) = x - 3 \geq 0$: $x - 4 \geq 0$ se $x \geq 4$, $x - 3 \geq 0$ se $x \geq 3$ (possiamo però notare subito che per $x = 3$ il denominatore della seconda frazione si annulla: $g(3) = 0$, questo implica che si dovrà imporre $x \neq 3$), quindi:
      (i) $x \geq 4$, le funzioni sono entrambe positive e possiamo togliere entrambi i moduli senza dover cambiare segno. Abbiamo ora una disequazione frazionaria la cui soluzione è $3 < x < 5$, **MA** dobbiamo ricordarci che ci troviamo nel caso $x \geq 4$ per cui l'intervallo si restringe a $4 \leq x < 5$.
      (ii) $3 < x < 4$, risolta la disequazione e fatte le dovute osservazioni la soluzione è $\frac{8+\sqrt{13}}{3} < x < 4$.

(iii) $x < 3$, $\nexists x < 3$ che verifica la disequazione.

Per cui la soluzione è: $\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{8+\sqrt{13}}{3} < x < 5\right\}$.

b) $\left\{x \in \mathbb{R} | x > \frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq 1\right\}$.

c) $\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < -1 \ \vee \ x > 1\right\}$.

d) $\left\{x \in \mathbb{R} | x \geq \sqrt{7}\right\}$.

4. Logaritmiche e esponenziali:

a) Poiché c'è una radice dobbiamo imporre la condizione sul radicando: $x \geq 0$; c'è un logaritmo e l'argomento deve essere **strettamente positivo**, ovvero $x + 1 > 0$ e quindi $x > -1$ e poiché il logaritmo è al denominatore deve essere $\log(x + 1) \neq 0$ che implica $x + 1 \neq 1$ ovvero $x \neq 0$; mettendo insieme tutte le condizioni abbiamo che necessariamente $x > 0$. Ora andiamo ad analizzare la disequazione: dobbiamo discutere la positività del numeratore e del denominatore: $f(x) = \sqrt{x} + e^x - 1 \geq 0$ e $g(x) = \log(x+1) > 0$. Per quanto riguarda il numeratore possiamo notare che $f(x) > 0$ se $x > 0$, basta vedere, quindi, dove $g(x) > 0$: accade per $x > 0$. La soluzione è quindi: $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

b) Va prestata attenzione all'esistenza della radice e del logaritmo stesso: la radice non ha problemi ma l'argomento del logaritmo è una frazione, così come la disequazione stessa. $\nexists x \in \mathbb{R}$ che soddisfa la disequazione.

c) $\left\{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{\log \frac{3\sqrt{5}}{16}}{\log 6}\right\}$.

d) $\{x \in \mathbb{R} | x = -1\}$.

5. Trigonometriche:

a) Studiamo la positività del numeratore: $\sin x \geq 0 \Leftrightarrow 0 + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; analizziamo ora il denominatore utilizzando la circonferenza goniometrica: si trova che $\sin x > \cos x \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; quindi la soluzione è:
$\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi \ \vee \ \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $\nexists x \in \mathbb{R}$ che soddisfa la disequazione.

c) $\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup$
$\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \ \vee \ \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.