Università degli Studi "Roma Tre"
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Esercitazione 12 – 18 Dicembre

(a cura di Paolo Tranquilli)

Soluzioni

Esercizio 1. Determinare per quali x le seguenti serie convergono.

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3x-10}{2}\right)^k\frac{1}{k^2}$;

Troviamo per quali x la successione tende a zero. Potremo allora escludere tutte le altre x per il criterio di Cauchy (anche se tendere a 0 non basta per la convergenza). Inoltre per semplificare il calcolo del limite lo applichiamo al valore assoluto, in quanto $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ se e solo se $\lim_{k\to+\infty}|a_k| = 0$.

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\left(\frac{3x-10}{2}\right)^k\frac{1}{k^2}\right| = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{3x-10}{2}\right|^k\frac{1}{k^2} = \begin{cases}0 & \text{se } \left|\frac{3x-10}{2}\right|\leq 1,\\ +\infty & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Ora la condizione è equivalente a

$$-1 \leq \frac{3x-10}{2} \leq 1 \iff -2 \leq 3x-10 \leq 2 \iff$$
$$\iff 8 \leq 3x \leq 12 \iff \frac{8}{3} \leq x \leq 4.$$

Quindi ora sappiamo che per $x < \frac{8}{3}$ o $x > 4$ la serie diverge. Per le altre x applichiamo il criterio della radice al valore assoluto per vedere se la serie converge assolutamente:

$$\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{3x-10}{2}\right|^k\frac{1}{k^2}} = |3x-10|\,2.$$

Quindi quando la disuguaglianza di sopra è stretta, ovvero $\frac{8}{3} < x < 4$ e $\left|\frac{3x-10}{2}\right| < 1$ la serie converge assolutamente. Inoltre quando $x = \frac{8}{3}$ o $x = 4$ abbiamo ancora convergeza assoluta perché:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k| = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

In definitiva abbiamo convergenza assoluta in $\frac{8}{3} \leq x \leq 4$ e divergenza altrove. Ricordiamo che la convergenza assoluta implica la convergenza.

b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos k\pi}{x-2}\right)^k\frac{1}{k}$;

Innanzitutto $\cos^k k\pi = (-1)^{k^2} = (-1)^k$, per cui

$$\left(\frac{\cos k\pi}{x-2}\right)^k = \left(\frac{-1}{x-2}\right)^k = \frac{1}{(2-x)^k}.$$

Come prima calcoliamo il limite del valore assoluto della successione.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{|2-x|^k k} = \begin{cases} 0 & \text{se } |2-x| \geq 1, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Vediamo quando la serie è certamente divergente:

$$|2-x| < 1 \iff -1 < 2-x < 1 \iff -3 < -x < -1 \iff 1 < x < 3.$$

Negli altri casi applichiamo il criterio della radice al valore assoluto:

$$limn[k] \sqrt[k]{\frac{1}{|2-x|^k k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{|2-x| \sqrt[k]{k}} = \frac{1}{|2-x|}.$$

Quindi quando $|2-x| > 1$, ovvero $x < 1$ o $x > 3$ abbiamo $\frac{1}{|2-x|} < 1$ e quindi la serie converge assolutamente per il criterio del confronto, e quindi anche converge. Ora restano due punti, che possiamo direttamente sostituire. Per $x = 1$, abbiamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

che diverge, mentre per $x = -1$ abbiamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

che converge per il criterio di Leibniz.

In definitiva abbiamo convergenza assoluta per $x < -1$ o $x > 3$, convergenza ma non assoluta per $x = 3$, e divergenza per $-1 \leq x < 3$.

c. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\left(e^{x^2-2} - 2\right)^k}{\sqrt{k}\log k}$;

Come prima.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\left|e^{x^2-2} - 2\right|^k}{\sqrt{k}\log k} = \begin{cases} 0 & \text{se } \left|e^{x^2-2} - 2\right| \leq 1, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La condizione equivale a

$$\begin{aligned} & -1 \leq e^{x^2-2} - 2 \leq 1 \iff 1 \leq e^{x^2-2} \leq 3 \iff 0 \leq x^2 - 2 \leq \log 3 \iff \\ & \iff 2 \leq x^2 \leq 2 + \log 3 \iff -\sqrt{2+\log 3} \leq x - \sqrt{2} \vee \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2+\log 3}. \end{aligned}$$

Applicando il criterio della radice al valore assoluto abbiamo

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{\left|e^{x^2-2}-2\right|^k}{\sqrt{k}\log k}\right|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\left|e^{x^2-2}-2\right|}{\sqrt[2k]{k}\cdot\sqrt[k]{\log k}} = \left|e^{x^2-2}-2\right|.$$

Il fatto che $\sqrt[k]{\log k}=1$ può essere ad esempio dedotto dal fatto che, definitivamente,

$$1 \leq \sqrt[k]{\log k} \leq \sqrt[k]{k},$$

e applicando quindi il teorema dei carabinieri. La serie quindi converge assolutamente per $\left|e^{x^2-2}-2\right| < 1$, ovvero se la disuguaglianza di sopra è stretta. Restano i casi $x = \pm\sqrt{2+\log 3}$ e $x=\pm\sqrt{2}$. Se $x=\pm\sqrt{2+\log 3}$ allora

$$\sum_{k=2}^{+\infty} a_k = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}\log k}$$

che converge per il criterio di Leibniz. Se $x=\pm\sqrt{2}$ allora

$$\sum_{k=2}^{+\infty} a_k = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\log k}$$

che diverge. Per mostrarlo si può ad esempio usare il criterio del confronto asintotico con $\frac{1}{k}$:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{\sqrt{k}\log k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt{k}}{\log k} = +\infty.$$

Visto che $\sum \frac{1}{k}$ diverge, allora diverge anche $\sum \frac{1}{\sqrt{k}\log k}$. In definitiva abbiamo divergenza per $x < -\sqrt{2+\log 3}$ o $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ o $x > \sqrt{2+\log 3}$, convergenza ma non assoluta in $x=\pm\sqrt{2+\log 3}$, convergenza assoluta altrove.

d. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+x^{2k}}$;

Calcoliamo

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x|^k}{|k+x^{2k}|} = \begin{cases} \text{se } |x|\leq 1: & \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\cdot\frac{|x|^k}{|1+k^{-1}x^{2k}|} = 0, \\ \text{se } |x|>1: & \lim_{k\to+\infty} \frac{|x|^k}{|x|^{2k}}\cdot\frac{1}{|kx^{-2k}+1|} = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{|x|^k} = 0. \end{cases}$$

Quindi il criterio di Cauchy non esclude nessun caso. Applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{|x|^k}{|k+x^{2k}|}} = \begin{cases} \text{se } |x|\leq 1: & \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}\cdot\frac{|x|}{\sqrt[k]{|1+k^{-1}x^{2k}|}} = |x|, \\ \text{se } |x|>1: & \lim_{k\to+\infty} \frac{|x|}{|x|^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[k]{|kx^{-2k}+1|}} = \frac{1}{x} < 1. \end{cases}$$

Quindi quando $|x|<1$ o $|x|>1$, ovvero semplicemente quando $|x|\neq 1$, la serie converge assolutamente. Restano due casi. Quando $x=-1$, abbiamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

che converge per il criterio di Leibniz. Quando $x = 1$ abbiamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}$$

che diverge, ad esempio confrontando $\frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{2k}$ che diverge. In definitiva abbiamo divergenza per $x = 1$, convergenza ma non assoluta in $x = -1$, e convergenza assoluta altrove.

e. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx^k}{(k-1)!}$;

Puntiamo direttamente alla convergenza assoluta, usando il criterio del rapporto sul valore assoluto.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)\,|x|^{k+1}}{k!} \cdot \frac{(k-1)!}{k\,|x|^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)\,|x|}{k^2} = 0,$$

quindi abbiamo convergenza assoluta per tutte le x.

f. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k + k^{3x}}{k^2}$.

Calcoliamo il limite del valore assoluto del termine:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\left|x^k + k^{3x}\right|}{k^2} = \begin{cases} \text{se } x = 0: & \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^2} = 0, \\ \text{se } 0 < |x| < 1: & \lim_{k\to+\infty} \frac{k^{3x}}{k^2}(k^{-3x}x^k + 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{2}{3}, \\ 1 & \text{se } x = \frac{2}{3}, \\ +\infty & \text{se } x > \frac{2}{3}, \end{cases} \\ \text{se } x = 1: & \lim_{k\to+\infty} \frac{1+k^3}{k^2} = +\infty, \\ \text{se } x = -1: & \lim_{k\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{k^3}}{k^2} = 0, \\ \text{se } |x| > 1: & \lim_{k\to+\infty} \frac{|x|^k}{k^2}(1 + x^{-k}k^{3x}) = +\infty. \end{cases}$$

Per il criterio di Cauchy quindi la serie diverge per $x < -1$ o $x \geq \frac{2}{3}$. Per ora consideriamo $0 \leq x < \frac{2}{3}$, così da avere a che fare con serie a termini positivi. Cerchiamo un confronto adatto, e confrontiamo con $\frac{1}{k^\alpha}$, lasiando a dopo la decisione per α.

$$\lim_{k\to+\infty} k^\alpha \frac{x^k + k^{3x}}{k^2} = \lim_{k\to+\infty} k^{\alpha+3x-2}(k^{-3x}x^k + 1) = \lim_{k\to+\infty} k^{\alpha+3x-2},$$

che viene 1 se scegliamo $\alpha = 2 - 3x$. Per il criterio del confronto asintotico (abbiamo fatto venire un limite finito e diverso da 0), la serie converge se e solo se converge $\sum \frac{1}{k^{2-3x}}$, che accade se e solo se $2 - 3x > 1$, ovvero se e solo se $x < \frac{1}{3}$.

Resta da vedere $x < 0$. Vediamo la convergenza assoluta per $-1 \leq x < 0$:

$$\left|x^k + k^{3x}\right| k^2 \leq \frac{|x|^k + k^{3x}}{k^2} \leq \frac{1+1}{k^2} = \frac{2}{k^2},$$

e visto che $\sum \frac{2}{k^2}$ converge, per il criterio del confronto converge anche $\sum \frac{\left|x^k+k^{3x}\right|}{k^2}$. In definitiva abbiamo convergenza assoluta in $-1 \leq x < \frac{1}{3}$ e divergenza altrove.

Esercizio 2. Determinare l'insieme di continuità delle seguenti funzioni e classificarne le discontinuità, al variare del parametro reale a.

a. $f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ a^2 & \text{altrimenti;} \end{cases}$

In $x \neq 0$ la funzione è composizione di funzioni continue, quindi è continua. Per $x = 0$, intanto trattiamo a parte il caso $a = 0$ (altrimenti non possiamo dividere e moltiplicare per a per avere il limite notevole), per cui abbiamo $f(x) = 0$ sempre e quindi una funzione continua. Se $a \neq 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{x\to 0} a\frac{\sin ax}{ax} = a \cdot 1 = a$$

usando il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. La funzione è quindi continua per $a = 0$ e $a = 1$ (dove $a = f(0) = a^2$), ed ha una discontinuità eliminabile in 0 altrimenti.

b. $f(x) := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{a}{x-1}} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}+1}} & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$ Per $x \neq 1$ la funzione è continua perché composizione di funzioni continue. $\mathrm{e}^{\frac{a}{x-1}}$ si comporta in modo diverso a seconda di a, quindi distinguiamo i vari casi. Se $a = 0$ abbiamo a numeratore $e^0 - 1 = 0$, quindi la funzione è sempre 0 ed è continua. Se $a > 0$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{x-1}} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}+1}} = frac0 - 10 + 1 = -1,$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{x-1}} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}+1}} = \lim_{x\to 1^+} \mathrm{e}^{\frac{a-1}{x-1}} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{x-1}}}{1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x-1}}} = \lim_{x\to 1^+} \mathrm{e}^{\frac{a-1}{x-1}} \begin{cases} 0 & \text{se } a < 1, \\ 1 & \text{se } a = 1, \\ +\infty & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

Se $a < 0$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{x-1}} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}+1}} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{x-1}} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}+1}} = -\infty$$

Quindi ricapitolando, la funzione in $x = 0$ è continua per $a = 0$, ha una discontinuità a salto per $0 < a \leq 1$, e una discontinuità di seconda specie altrimenti.

c. $f(x) := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{a}{x^2}}}{x^2 - x} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq 1, \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$

Per $x \neq 0$ e $x \neq 1$ la funzione è continua. Per $x = 1$ abbiamo, qualunque sia a:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{x^2}}}{x^2 - x} = \infty,$$

per cui abbiamo una discontinuità di seconda specie. Per $x = 0$, se $a \geq 0$, abbiamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{x^2}}}{x^2 - x} = \infty,$$

mentre se $a < 0$ abbiamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{x^2}}}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{x^2}}}{x} \cdot \frac{1}{x - 1} = 0.$$

Quindi la funzione in $x = 0$ ha una discontinuità di seconda specie se $a \geq 0$, ed è continua se $a < 0$.

d. $f(x) := \begin{cases} \left(\dfrac{\sin a^2 x}{\mathrm{e}^x - 1} - 1 \right) \arctan \dfrac{a}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$

Per $x \neq 0$ la funzione è composizione di funzioni continue e quindi è continua. Escludiamo $a = 0$ (vogliamo dividere e moltiplicare per $a^2 x$), dove la funzione è sempre 0 ($\arctan 0 = 0$). Intanto vediamo cosa fa il fattore di sinistra:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin a^2 x}{e^x - 1} - 1 = \lim_{x \to 0} a^2 \frac{\sin a^2 x}{a^2 x} \cdot \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} - 1 = a^2 - 1.$$

L'arcotangente invece ha limite destro e sinistro diversi. Se $a > 0$ (il caso $a < 0$ è simmetrico), abbiamo

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -(a^2 - 1)\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = (a^2 - 1)\frac{\pi}{2}.$$

I due sono uguali se e solo se $a^2 - 1 = 0$, ovvero $a = \pm 1$, nel qual caso sono uguali a 0. Ricapitolando: la funzione è continua in 0 per $a = -1, 0, 1$, ed ha una discontinuità a salto altrimenti.

e. $f(x) := \begin{cases} \dfrac{\log(1 + ax^2)}{1 - \cos x} & \text{se } x \neq 2k\pi \text{ per } k \in \mathbb{Z}, \\ a^2 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Il dominio di f (contando che è stata definita dove si annulla il denominatore) è $1 + ax^2 > 0$, ovvero tutto $\mathbb{R}$ se $a \geq 0$, e $-\sqrt{-\frac{1}{a}} \leq x \leq \sqrt{-\frac{1}{a}}$ se $a < 0$. Se $a = 0$ la funzione è continua perché è costante 0. Altrimenti: per $k \neq 0$ ho

$$\lim_{x \to 2k\pi} \frac{\log(1 + ax^2)}{1 - \cos x} = \infty$$

di segno positivo o negativo a seconda del segno di $\log(1 + 4ak^2\pi^2)$. Il limite non è comunque una forma indeterminata. Ho quindi delle discontinuità di seconda specie. Per 0, ho

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + ax^2)}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} a \frac{\log(1 + ax^2)}{ax^2} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x} = 2a,$$

per cui la funzione è continua in 0 se $a^2 = 2a$, ovvero $a = 0$ (già contato) o $a = 2$, altrimenti ha una discontinuità di terza specie, eliminabile.