Università degli Studi "Roma Tre"
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Esercitazione 11 – 17 Dicembre

(a cura di Paolo Tranquilli)

Soluzioni

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

a.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x(\mathrm{e}^{\cos x}-1) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x}(\mathrm{e}^{\cos x}-1).$$

Visto che $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x = 0$, si può applicare il limite notevole $\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^y-1}{y}=1$. Quindi:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x(\mathrm{e}^{\cos x}-1)\cos x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot 1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

b.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\cdot\frac{4x^2}{\sin^2 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2 = \frac{2}{9},$$

sfruttando i limiti notevoli $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

c.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\log(1+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\log(1+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

sfruttando il limite notevole $\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=1$.

d. Abbiamo $\sin(\pi\cos x) = -\sin(-\pi\cos x) = \sin(\pi-\pi\cos x) = \sin(\pi(1-\cos x))$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos x)}{\pi(1-\cos x)}\cdot\frac{\pi(1-cosx)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} 1\cdot\pi\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x} = \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{\pi}{2},$$

sfruttando due volte il limite notevole $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}$ e $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

e.

$$\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} = \lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}} = \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5} = 2\sqrt{5}.$$

f.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\tan x+(1-\cos 2x)\sin^2 x}{27x^4+5\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\frac{sinx}{x}\cdot\frac{x}{\cos x}+4x^4\cdot\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{27x^4+5\frac{\sin x}{x}\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 1\cdot\frac{x}{1}+4x^4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2}{27x^4+5\cdot 1\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}\cdot\frac{3+4x^3}{27x^3+5} = \frac{3}{5},$$

sfruttando i limiti notevoli $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Esercizio 2. Determinare l'insieme di continuità delle seguenti funzioni, e classificarne le eventuali discontinuità.

a. $f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$

Per $x \neq 0$ la funzione è composizione di funzioni continue, quindi è continua. Per $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$$

in quanto $\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$. La funzione è quindi continua in tutto $\mathbb{R}$.

b. $f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$

Per $x \neq 0$ la funzione è composizione di funzioni continue, quindi è continua. Per $x = 0$ si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = +\infty,$$

quindi 0 è una discontinuità di seconda specie.

c. $f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0; \end{cases}$

Per $x \neq 0$ etc. Per $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \neq f(0).$$

È quindi una discontinuità di terza specie, eliminabile.

d. $f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0; \end{cases}$

Per $x \neq 0$ etc. Per $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \sin x = 1 = f(0).$$

La funzione è continua.

e. $f(x) := \begin{cases} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0, \\ \mathrm{e} & \text{se } x = 0; \end{cases}$

Per $x \neq 0$ si ha

$$(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x} \log(1 + \sin x)},$$

continua laddove $\sin x \neq -1$ perché composizione di funzioni continue, estesa con continuità anche a $1 + \sin x = 0$ in quanto il limite viene 0 ("$\mathrm{e}^{-\infty} = 0$"). Per $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} = f(0),$$

quindi la funzione è continua.

f. $f(x) := \begin{cases} (1+|\sin x|)^{\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0, \\ \mathrm{e} & \text{se } x = 0; \end{cases}$

Per $x \neq 0$ etc. Per $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0}(1+|\sin x|)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+|\sin x|)^{\frac{1}{|\sin x|}\cdot\frac{|\sin x|}{x}} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{|\sin x|}{x}},$$

e si vede che il limite viene diverso a seconda del segno:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\sin x}{x}} = \mathrm{e}, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{-\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Quindi 0 è discontinuità di prima specie.

g. $f(x) := \begin{cases} \arctan\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$

h. $f(x) := \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{\tan x} & \text{se } x \neq k\frac{\pi}{2} \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}, \\ 1 & \text{altrimenti;} \end{cases}$ Per $x \neq k\frac{\pi}{2}$ etc. Altrimenti:

- se $x = (2h+1)\frac{\pi}{2}$ (dove $\tan x$ non è definita e tende a $\pm\infty$), si ha

  $$\lim_{x\to(2h+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{\tan x} = 0 \neq f\left((2h+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

  (non è nemmeno una forma indeterminata), quindi si tratta di discontinuità di terza specie, eliminabili;
- se $x = 2h\frac{\pi}{2} = h\pi$, si ha $\lim_{x\to h\pi}\sin x = 0$, per cui:

  $$\lim_{x\to h\pi} f(x) = \lim_{x\to h\pi} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{\sin x}\cos x = 1\cdot\cos h\pi = (-1)^h,$$

  quindi f è continua per $h = 2k$, ovvero $x = 2k\pi$, ed ha discontinuità eliminabili per $h = 2k+1$, ovvero $x = (2k+1)\pi$.

i. $f(x) := |[x]|^{\{x\}}$,

In ogni intervallo $(k, k+1)$ per $k \in \mathbb{Z}$ la funzione è continua perché uguale a k^{x-k}. Per $x = k$:

$$\lim_{x\to k^-}[x] = k-1, \ \lim_{x\to k^-}\{x\} = 1, \ \lim_{x\to k^+}[x] = k, \ \lim_{x\to k^+}\{x\} = 0.$$

Quindi, a parte per $k = 0$ dove per 0^+ si incappa nella forma indeterminata 0^0, si ha

$$\lim_{x\to k^-} f(x) = k-1, \quad \lim_{x\to k^+} f(x) = 1.$$

Per 0^+ il limite è 0 (perché $[x]$ è costante 0 vicino a 0^+). In ogni caso siamo di fronte a discontinuità di prima specie, tranne quando $k-1 = 1$, ovvero $k = 2$ dove la funzione è continua.

j. $f(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Per $x = 0$ la funzione è continua, perché $0 \leq |f(x)| \leq |x|$, quindi (teorema dei carabinieri) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Mostriamo che per ogni $x_0 \neq 0$ i limiti $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ non esistono, e quindi la funzione è discontinua di seconda specie.

Per x_0^+, per un qualunque $k \in \mathbb{N}$ scegliamo $q_k, r_k \in (x_0, x_0 + \frac{1}{k})$ tali che $q_k \in \mathbb{Q}$ e $r_k \notin \mathbb{Q}$, esistenti per densità di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Ora $\lim_{k\to+\infty} q_k = \lim_{k\to+\infty} r_k = x_0^+$ (ovvero vi tendono e sono maggiori di esso), e

$$f(q_k) = q_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_0, \quad f(r_k) = 0 \neq x_0,$$

e quindi per il teorema ponte non esiste $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$. Si può fare ragionamento analogo per x_0^-.