Università degli Studi "Roma Tre"
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Esercitazione 10 – 10 Dicembre

(a cura di Paolo Tranquilli)

Soluzioni

Esercizio 1. Studiare la convergenza delle seguenti serie.

a. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\log k}$;

Abbiamo $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\log k} = 0$, e

$$k+1 > k \implies \log(k+1) > \log k \implies \frac{1}{\log(k+1)} < \frac{1}{\log k},$$

per cui $\frac{1}{\log k}$ è decrescente e per il criterio di Leibniz la serie converge.

b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos k\pi}{\mathrm{e}^k + 3k}$;

$\cos k\pi = (-1)^k$, $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^k+3k} = 0$, e

$$\mathrm{e}^{k+1} + 3(k+1) > \mathrm{e}^k + 3k, \implies \frac{1}{\mathrm{e}^{k+1} + 3(k+1)} < \frac{1}{\mathrm{e}^k + 3k},$$

quindi per il criterio di Leibniz la serie converge.

c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 - 20k + 2}$;

$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^2-20k+2} = 0$, e

$$\frac{1}{(k+1)^2 - 20(k+1) + 2} = \frac{1}{k^2 - 18k - 17} < \frac{1}{k^2 - 20k + 2} \overset{(*)}{\iff}$$
$$\iff k^2 - 18k - 17 > k^2 - 20k + 2 \iff 2k > 19 \iff k \geq 10,$$

per cui la successione è definitivamente decrescente. Notare che $(*)$ è giustificata dal fatto che *definitivamente* entrambi i denominatori sono positivi (altrimenti si dovrebbe fare i casi per decidere il verso della disuguaglianza). Per il criterio di Leibniz la serie converge.

d. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k \sin \frac{\pi}{2} k}{\log k}$; La serie non conevrge perché per il termine $a_k = \frac{k \sin \frac{\pi}{2} k}{\log k}$ non tende a 0, infatti

$$a_{4h+1} = \frac{4h+1}{\log(4h+1)} \overset{h\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

e. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\log k}$.

Abbiamo

$$\sin\frac{\pi}{2}k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2h, \\ 1 & \text{se } k = 4h+1 = 2(2h)+1, \\ -1 & \text{se } k = 4h+3 = 2(2h+1)+1, \end{cases}$$

Possiamo togliere i termini nulli dalla serie, per cui reindicizzando:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\log k} = \sum_{i=3}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{\log(2i+1)}.$$

La successione decresce e tende a 0, per cui per il criterio di Leibniz la serie converge.

Esercizio 2. Mostrare che se a_k è una successione convergente a 0, allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge} \iff \sum_{h=0}^{+\infty} (a_{2h} + a_{2h+1}) \text{ converge},$$

e se convergono allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{h=0}^{+\infty}(a_{2h} + a_{2h+1})$. Mostrare un controesempio alla stessa proprietà senza l'ipotesi di convegenza a 0.

Dimostrazione. Siano s_n e t_m le successioni delle somme ridotte delle due serie, ovvero

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad t_m := \sum_{h=0}^{m} (a_{2h} + a_{2h+1}).$$

È ovvio che $t_m = s_{2m+1}$. Quindi essendo t_m sottosuccessione di s_n l'implicazione da sinistra a destra è fatta (notare che vale anche senza l'ipotesi di convergenza a 0).

Viceversa supponiamo che $\lim_{m\to+\infty} t_m = L$. Quindi $\lim_{m\to+\infty} s_{2m+1} = L$, e

$$\lim_{m\to+\infty} s_{2m} = \lim_{m\to+\infty} (t_{m-1} + a_{2m}) = L + 0 = L.$$

Quindi poiché abbiamo due sottosuccessioni che partizionano l'intera successione e che tendono allo stesso limite L, abbiamo che $\lim_{n\to+\infty} s_n = L$.

Come controesempio si può prendere $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k$, che non converge, mentre

$$\sum_{h=0}^{+\infty} ((-1)^{2h} + (-1)^{2h+1}) = \sum_{h=0}^{+\infty} (1-1) = 0.$$

$\square$

Esercizio 3. Studiare la convergenza di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{3}k}{k}.$$

(suggerimento: utilizzare l'esercizio precedente.)

Abbiamo

$$\sin\frac{\pi}{3}k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 3h, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{se } k = 6h+1 = 3(2h)+1 \text{ o } k = 6h+2 = 3(2h)+2, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{se } k = 6h+4 = 3(2h+1)+1 \text{ o } k = 6h+5 = 3(2h+1)+2. \end{cases}$$

Togliendo i termini nulli e associando la somma a due due (come giustificato dall'esercizio precedente, in quanto i termini tendono a 0), abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{3}k}{k} = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3i+1} + \frac{1}{3i+2}\right).$$

Si tratta quindi di una serie a segno alterni. I termini tendono a 0, e inoltre sono banalmente decrescenti, quindi per il criterio di Leibniz la serie converge.

Esercizio 4. Determinare massimo e minimo limite delle seguenti successioni.

a. $a_n := (-1)^n \dfrac{n+1}{n} = (-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$;

Mostriamo che $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.

- La sottosuccessione $a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- Per ogni $\varepsilon > 0$ mostriamo che $a_n < 1+\varepsilon$ definitivamente. Per $n = 2h+1$ abbiamo

$$a_{2h+1} = -1 - \frac{1}{2h+1} < 0 < 1+\varepsilon.$$

Per $n = 2h$ abbiamo

$$a_{2h} = 1 + \frac{1}{2h} < 1+\varepsilon \iff \frac{1}{2h} < \varepsilon \iff h > \frac{1}{2\varepsilon},$$

che quindi definitivamente vale.

Mostriamo che $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = -1$.

- La sottosuccessione $a_{2k+1} = -1 - \frac{1}{2k+1} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.
- Per ogni $\varepsilon > 0$ mostriamo che $a_n > -1-\varepsilon$ definitivamente. Per $n = 2h+1$ abbiamo

$$a_{2h+1} = -1 - \frac{1}{2h+1} < -1-\varepsilon \iff h > \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2},$$

che quindi definitivamente vale. Per $n = 2h$ abbiamo

$$a_{2h} = 1 + \frac{1}{2h} > 0 > -1-\varepsilon.$$

b. $a_n := \arctan 2^{-n} = \arctan((-1)^n 2^n)$;

Mostriamo che $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{\pi}{2}$.

- La sottosuccessione $a_{2k} = \arctan 2^{2k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.
- Per ogni n abbiamo $a_n < \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \varepsilon$.

Mostriamo che $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = -\frac{\pi}{2}$ per un ragionamento analogo al precedente.

c. $a_n := \dfrac{n+1}{n} \sin \dfrac{\pi n}{10} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \sin \dfrac{\pi n}{10}$;

Abbiamo che $\sin \frac{\pi n}{10} = 1$ per

$$\frac{\pi n}{10} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff n = 5 + 20k$$

e che è uguale a -1 per

$$\frac{\pi n}{10} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \iff n = 15 + 20k.$$

Quindi, $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ perché

- la sottosuccessione $a_{20k+5} = 1 + \frac{1}{20k+5} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$;
- per ogni $\varepsilon > 0$:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi n}{10} \le 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon \Longleftarrow n > \frac{1}{\varepsilon},$$

  che accade definitivamente.

Per ragionamento analogo (e utilizzando la sottosuccessione a_{20k+15}) si ottiene che

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n = -1.$$

d. $a_n := (-1)^n + \sin \dfrac{1}{n}$;

$\max\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$, infatti

- la sottosuccessione $a_{2k} = 1 + \sin \frac{1}{2k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$;
- per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$a_n \le 1 + \sin \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon \Longleftarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

  che accade definitivamente.

$\min\lim_{n\to+\infty} a_n = -1$, poiché

- la sottosuccessione $a_{2k+1} = -1 + \sin \frac{1}{2k+1} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -1$
- per ogni n abbiamo $a_n > -1 > -1 - \varepsilon$.

e. $a_n := (-1)^n e^{n \cos n\pi} = (-1)^n e^{(-1)^n n}$;

$\max\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, in quanto la sottosuccessione $a_{2k} = e^{2k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Nel caso di $+\infty$ (o $-\infty$ per $\min\lim$) non c'è bisogno di mostrare altro.

$\min\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, in quanto

- la sottosuccessione $a_{2k+1} = -\mathrm{e}^{-2k-1} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;
- per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che per $n = 2k$ pari vale $a_{2k} = \mathrm{e}^{2k} > 0 > -\varepsilon$, mentre per $n = 2k+1$ dispari abbiamo

$$a_{2k+1} = -\mathrm{e}^{-2k-1} > -\varepsilon \iff -2k-1 < \log\varepsilon \iff k > -\frac{1}{\log\varepsilon} - \frac{1}{2},$$

che accade definitivamente.

f. $a_n := [\sin n + 1]$,

Mostriamo che $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$. Innanzitutto vediamo che $\sin n < 1$, con disuguaglianza stretta. Supponiamo $\sin n = 1$, per cui

$$n = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \iff \pi = \frac{2n}{4k+1},$$

che è impossibile perché π è irrazionale.

- Dall'ipotesi $\max\lim_{n\to+\infty} \sin n = 1$ possiamo dedurre l'esistenza di una sottosuccessione $\sin n_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, per cui definitivamente abbiamo $0 < \sin n_k < 1$ (la prima disuguaglianza per il limite, la seconda, stretta, per quanto visto prima). Quindi definitivamente $[\sin n_k + 1] = 1$.
- Da $\sin n + 1 < 2$ possiamo dedurre $[\sin n + 1] \leq 1 < 1 + \varepsilon$ per ogni n.

Mostriamo $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

- Dall'ipotesi $\min\lim_{n\to+\infty} \sin n = -1$ possiamo dedurre l'esistenza di una sottosuccessione $\sin n_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -1$, che implica che definitivamente $0 \leq \sin n_k + 1 < 1$, da cui $[\sin n_k + 1] = 0$ definitivamente.
- Da $\sin n \geq -1$ deduciamo $[\sin n + 1] \geq 0 > -\varepsilon$ per ogni n.