Università degli Studi "Roma Tre"
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Esercitazione 10 – 10 Dicembre

(a cura di Paolo Tranquilli)

Esercizio 1. Studiare la convergenza delle seguenti serie.

a. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\log k}$;

b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos k\pi}{\mathrm{e}^k + 3k}$;

c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 - 20k + 2}$;

d. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k \sin \frac{\pi}{2}k}{\log k}$;

e. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2}k}{\log k}$.

Esercizio 2. Mostrare che se a_k è una successione convergente a 0, allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge} \iff \sum_{h=0}^{+\infty}(a_{2h} + a_{2h+1}) \text{ converge},$$

e se convergono allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{h=0}^{+\infty}(a_{2h} + a_{2h+1})$. Mostrare un controesempio alla stessa proprietà senza l'ipotesi di convegenza a 0.

Esercizio 3. Studiare la convergenza di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3}k}{k}.$$

(suggerimento: utilizzare l'esercizio precedente.)

Esercizio 4. Determinare massimo e minimo limite delle seguenti successioni.

a. $\displaystyle(-1)^n \frac{n+1}{n}$;

b. $\arctan 2^{-n}$;

c. $\displaystyle\frac{n+1}{n} \sin \frac{\pi n}{10}$;

d. $\displaystyle(-1)^n + \sin \frac{1}{n}$;

e. $(-1)^n \mathrm{e}^{n \cos n\pi}$;

f. $[\sin n + 1]$, dove $[x]$ è la parte intera di x, e dando per noto che $\max\lim \sin n = 1$, $\min\lim \sin n = -1$.