Università degli Studi "Roma Tre"
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Esercitazione 9 – 3 Dicembre

(a cura di Paolo Tranquilli)

Soluzioni

Esercizio 1. Determinare se le seguenti serie convergono o divergono.

a.

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{(-1)^k}{4}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^k = \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Visto che $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k$ converge, per il criterio del confronto la serie converge.

b.

$$\frac{k+\cos k}{\sqrt{k^5+k^3+2}} \overset{(1)}{\leq} \frac{k+1}{\sqrt{k^5}} \overset{(2)}{\leq} \frac{2k}{k^{\frac{5}{2}}} = 2\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}.$$

(1) è giustificata da $\cos k \leq 1$ e $k^3+2 \geq 0$, (2) dal fatto che $k \geq 1$ definitivamente. Visto che $\sum_{k=1}^{+\infty} 2\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge allora per il criterio del confronto la serie converge. Notare come il valore a cui inizia la serie ($k=0$ per la serie dell'esercizio, $k=1$ per quella con cui viene confrontata) non conti.

c.

$$\frac{k+\cos k}{\sqrt{k^3+2}} \overset{(1)}{\geq} \frac{k-1}{\sqrt{2k^3}} \overset{(2)}{\geq} \frac{\frac{k}{2}}{\sqrt{2}\cdot k^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

(1) deriva da $\cos k \geq -1$ e $2 \leq k^3$ definitivamente. (2) da $-1 \geq \frac{k}{2}$ definitivamente. Visto che $\sqrt{1}2\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge, diverge anche la serie.

d. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\log k}{k}$, Mostriamo che diverge con il criterio del confronto asintotico, confrontandola con $\frac{1}{k}$.

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{1}{k}}{\frac{\log k}{k}} = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\log k} = 0.$$

Visto che $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ diverge, diverge anche la serie.

N.B.: se non si sa con quale potenza di $\frac{1}{k}$ confrontare, si può parametrizzarla, confrontando con $\frac{1}{k^\alpha}$ e calcolando il limite del rapporto (in un verso o nell'altro) in dipendenza da α. Ad esempio in questo caso:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{\log k}{k}}{\frac{1}{k^\alpha}} = \lim_{k\to+\infty} k^\alpha\frac{\log k}{k} = \lim_{k\to+\infty}\frac{\log k}{k^{1-\alpha}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 1-\alpha \leq 0, \text{ ovvero } \alpha \geq 1, \\ 0 & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

A questo punto possiamo per il criterio del confronto asintotico o dedurre la convergenza dalla convergenza di $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ con $\alpha < 1$, che però non c'è, oppure dedurne la divergenza dalla divergenza di $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ con $\alpha \geq 1$, che nel caso di $\alpha = 1$ viene.

e. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log k}{k^2}$, Come prima, ma mostriamo che converge confrontandola con $\frac{1}{k^2}$.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{\log k}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\log k} = 0.$$

Visto che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, anche la serie converge.

f. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{k}$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} k\sin\frac{1}{k} = 1.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie converge se e solo se converge $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$. Questa diverge, dunque diverge anche la serie.

g.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{\log\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} k\frac{\frac{1}{k^2}\cdot k^2\log\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{k}\cdot k\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{1}{1} = 1.$$

Visto che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge, per il criterio del confronto asintotico diverge anche la serie.

h.

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{e-1}{2}\right)^k \frac{k^{10}+2}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{e-1}{2}\cdot\frac{\sqrt[k]{k^{10}}\left(1+\frac{2}{k^{10}}\right)^{\frac{1}{k}}}{\sqrt[k]{k}} = \frac{e-1}{2}\frac{1\cdot 1}{1} = \frac{e-1}{2} < 1$$

quindi per il criterio asintotico della radice la serie converge.

i.

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left(1+\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^{k^2}} = \lim_{k\to+\infty} \left(1+\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^k =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left(1+\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^{\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}k\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} = e^1 = e > 1,$$

quindi per il criteroi asintotico della radice la serie diverge.

j. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k(k^2+1)}{k!}$, Usiamo il criterio asintotico del rapporto.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{2^{k+1}((k+1)^2+1)}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{2^k(k^2+1)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2}{k+1}\cdot\frac{k^2+2k+2}{k^2+1} = 0 < 1$$

quindi la serie converge.

k. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left[\frac{k}{2}\right]!}{k!}$. Calcoliamo ilrapporto r_k tra termini successivi a_{k+1} e a_k della serie. Dobbiamo distinguere in pari e dipsari perché $\left[\frac{k}{2}\right]$ ha espressione diversa nei due casi.

$k = 2h$ pari allora

$$r_{2h} = \frac{\left[\frac{2h+1}{2}\right]!}{(2h+1)!} \cdot \frac{(2h)!}{\left[\frac{2h}{2}\right]!} = \frac{h!}{2h+1} \cdot \frac{1}{h!} = \frac{1}{2h+1}.$$

$k = 2h+1$ dispari allora

$$r_{2h+1} = \frac{\left[\frac{2h+2}{2}\right]!}{(2h+2)!} \cdot \frac{(2h+1)!}{\left[\frac{2h+1}{2}\right]!} = \frac{(h+1)!}{2h+2} \cdot \frac{1}{h!} = \frac{h+1}{2h+1}.$$

Abbiamo quindi che

$$\lim_{h\to+\infty} r_{2h} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to+\infty} r_{2h+1} = \frac{1}{2},$$

per cui non possiamo utilizzare il criterio asintotico del rapporto. Però i due limiti di qui sopra ci assicurano che entrambre le sottosuccessioni sono definitivamente minori di, ad esempio, $\frac{3}{4} < 1$. Quindi anche tutta $r_k \leq \frac{3}{4}$ definitivamente, che per il criteroi del rapporto ci assicura la convergenza.