Università degli Studi "Roma Tre"
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Esercitazione 8 – 26 Novembre

(a cura di Paolo Tranquilli)

Soluzioni

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

a.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+\sin n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1+0}{\sqrt{1+0}}=1.$$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$ per il teorema dei carabinieri, in quanto $-\frac{1}{n}\leq\frac{\sin n}{n}\leq\frac{1}{n}$.

b.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1})&=\\&=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\\&=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=\frac{2}{2}=1.\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\frac{n^2+1}{n+1}\right)&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1-\frac{(n^2+1)^2}{(n+1)^2}}{\sqrt{n^2+1}+\frac{n^2+1}{n+1}}=\\&=\lim_{n\to+\infty}(n^2+1)\frac{1-\frac{n^2+1}{n^2+2n+1}}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{n^2}{n}\cdot\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}}=\\&=\lim_{n\to+\infty}n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\frac{\frac{n^2+2n+1-n^2-1}{n^2+2n+1}}{n\left(\sqrt{1}+\frac{1}{1}\right)}=\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{2n^2n\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{1+1}=1\end{aligned}$$

d.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{\sin \pi x}=\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{\sin(\pi+\pi y)}=\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{-\sin \pi y}=$$
$$=\lim_{y\to 0}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\log(1+y)}{y}\cdot\frac{\pi y}{\sin \pi y}=\lim_{y\to 0}-\frac{1}{\pi}\cdot 1\cdot\frac{1}{\frac{\sin \pi y}{\pi y}}=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1}=-\frac{1}{\pi}.$$

grazie ai limiti notevoli $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$.

e.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{\log^2 n+\log n^2}}{1+\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{\log^2 n+2\log n}}{\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\log n\sqrt{1+\frac{2}{\log n}}}{\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)}=0\cdot\frac{1}{1}$$

grazie al limite notevole $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n^{\frac{1}{2}}}=0$.

f.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^2+\log^2 n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-\frac{n}{3}\left(-\frac{3}{n}\right)(n^2+\log^2 n)}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{n^2\left(1+\frac{\log^2}{n^2}\right)}{n}}=\lim_{n\to+\infty}e^{-n\cdot 1}=0$$

grazie a $\lim_{n\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

g.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3+2n+1}{n^3}\right)^{\cot\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\left(\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)\frac{\cos\frac{1}{n^2}}{\sin\frac{1}{n^2}}}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{(2n+1)\cdot 1}{n^3\sin\frac{1}{n}^2}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{2+\frac{1}{n}}{n^2\sin\frac{1}{n^2}}}=e^2.$$

h.

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2+2)\sin\frac{1}{n}-\sqrt{n^2+4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2}{n}n\sin\frac{1}{n}-\sqrt{n^2+4}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2}{n}-\sqrt{n^2+4}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n^2+2)^2}{n^2}-n^2-4}{\frac{n^2+2}{n}+\sqrt{n^2+4}}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+4n^2+4-n^4-4n^2}{n^2\cdot n\left(1+\frac{2}{n^2}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n^3\cdot 2}=0.$$

Esercizio 2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ i seguenti limiti esistono finiti o infiniti e in caso affermativo calcolarli.

a. $\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$

L'espressione ha senso solo per $a \geq 0$. Conviene riscrivere

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = e^{\log a^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{\log a}{n}},$$

ma possiamo farlo solo per $a \neq 0$. Vediamo questo caso a parte: $\lim_{n\to+\infty} n(-1) = -\infty$.

Per $a > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \lim_{n\to+\infty} \log a \frac{n}{\log a}(e^{\frac{\log a}{n}} - 1) = \log a \cdot 1 = \log a,$$

grazie al limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Quindi il limite esiste per ogni $a \geq 0$.

b. $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{a} + \frac{\log n}{n}\right)^n$

Il limite ha senso solo per $a \geq 0$. Come prima, consideriamo $a = 0$ a parte: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^n = 0$.

Per $a > 0$ la base della potenza tende a 1, e cerchiamo quindi di ricondurci al limite notevole $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Poniamo $s_n := \sqrt[n]{a} - 1 + \frac{\log n}{n^2} \to 0$ per $n \to +\infty$. Il limite diventa:

$$\lim_{n\to+\infty} (1+s_n)^n = \lim_{n\to+\infty} (1+s_n)^{\frac{1}{s_n} s_n n} = \lim_{n\to+\infty} e^{ns_n},$$

grazie al limite notevole $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Calcoliamo quindi

$$\lim_{n\to+\infty} ns_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1 + \frac{\log n}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) + \frac{\log n}{n} = \log a + 0 = \log a,$$

grazie al limite del punto precedente e al limite notevole $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$. Quindi il limite viene $e^{\log a} = a$, risultato che si può estendere anche a $a = 0$.

c. $\lim_{n\to+\infty} (\cos \pi a)^n$

Abbiamo $-1 \leq \cos \pi a \leq 1$: il limite non esiste per $\cos \pi a = -1 \iff a \in 2\mathbb{Z} + 1$ (ovvero i numeri interi dispari).

Per $a \in 2\mathbb{Z}$ (i numeri interi pari) abbiamo $\cos \pi a = 1$ e quindi $\lim_{n\to+\infty}(\cos \pi a)^n = 1$. Per tutte le altre a abbiamo $\lim_{n\to+\infty}(\cos \pi a)^n = 0$.

d. $\lim_{n\to+\infty} a^n \frac{(-1)^n}{(n^2+1)\sin\frac{1}{n}}$

$$\lim_{n\to+\infty} a^n \frac{(-1)^n}{(n^2+1)\sin\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-a)^n}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right) n^2 \sin\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-a)^n}{1}.$$

Tale limite è:

$$\lim_{n\to+\infty}(-a)^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < -1, \\ 1 & \text{se } a = -1, \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1, \\ \text{non esiste} & \text{se } a \geq 1. \end{cases}$$