Università degli Studi “Roma Tre”
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Esercitazione 7 – 19 Novembre

(a cura di Paolo Tranquilli)

Soluzioni

Esercizio 1. Verificare mediante la definizione che valgono i seguenti limiti.

a. $\lim_{x\to 1} (\sin \pi x + x) = 1$,

Poniamo $y = x - 1$, abbiamo:

$$\lim_{x\to 1} (\sin \pi x + x) = 1 \iff \lim_{y\to 0} (\sin(\pi y + \pi) + y + 1) .$$

Sia $\varepsilon > 0$, e supponiamo $|y| < \delta$. Abbiamo $\sin(\pi y + \pi) = -\sin \pi y$, e per ogni z si ha anche $|\sin z| \leq |z|$:

$$|-\sin \pi y + y + 1 - 1| \leq |-\sin \pi y| + |y| < |\pi y| + \delta < (\pi + 1)\delta.$$

Quindi basta scegliere $\delta = \frac{\varepsilon}{\pi+1}$ per ottenere

$$|\sin(\pi y + \pi) + y + 1 - 1| < \varepsilon.$$

b. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{2x^2+1} = \dfrac{1}{2}$,

$\frac{x^2}{2x^2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2+1}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e imponiamo:

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4x^2+2} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{4x^2+2} < \varepsilon,$$

poiché $4x^2 + 2 > 0$. Inoltre per ε abbastanza piccoli (la disequazione vale sempre altrimenti):

$$4x^2 + 2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff x < -\sqrt{\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}} \vee x > \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}}.$$

In particolare scegliendo $N = \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}}$ otteniamo

$$x > N \implies \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4x^2+2} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

c. $\lim_{x\to -1} \dfrac{1}{(x+1)^2} = +\infty$,

Sia $M > 0$, allora:
$$\frac{1}{(x+1)^2} > M \iff |x+1| < \frac{1}{M^2}.$$
Scegliendo dunque $\delta = \frac{1}{M^2}$ abbiamo quanto voluto:
$$|x+1| < \delta \implies \frac{1}{(x+1)^2} > M.$$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \cdot 2^{-x} = 0,$

$e^x \cdot 2^{-x} = \left(\frac{e}{2}\right)^x$. Per ogni $\varepsilon > 0$:
$$\left|\left(\frac{e}{2}\right)^x - 0\right| < \varepsilon \iff \left(\frac{e}{2}\right)^x < \varepsilon \iff$$
$$\iff \log\left(\frac{e}{2}\right)^x < \log\varepsilon \iff x(\log e - \log 2) < \log\varepsilon \iff x < \frac{\log\varepsilon}{1-\log 2},$$
quindi scegliendo $M = \frac{\log\varepsilon}{1-\log 2}$ abbiamo
$$x < M \implies \left|\left(\frac{e}{2}\right)^x\right| < \varepsilon.$$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\log^2 x}{\log x} = +\infty,$

Per ogni M, prendendo $x > N \geq 1$ in modo che $\log x > 0$:
$$\frac{1+\log^2 x}{\log x} > M \iff 1+\log^2 x > M\log x \iff \log^2 x - M\log x + 1 > 0$$
che per M abbastanza grande ($M > 2$) risulta valida per
$$\log x < \frac{M-\sqrt{M^2-4}}{2} \vee \log x > \frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}.$$
Scegliendo dunque $N = e^{\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}}$ otteniamo
$$x > N \implies \log x > \frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2} \implies \frac{1+\log^2 x}{\log x} > M.$$

f. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-2}{x} = 1,$

Per ogni $\varepsilon > 0$, supponiamo $|x-1| < \delta$.
$$\left|\frac{x^2+2x-2}{x} - 1\right| = \left|\frac{x^2+x-2}{x}\right| = \left|\frac{(x-1)^2+3x-3}{x}\right| =$$
$$= \left|(x-1)\frac{x-1+3}{x}\right| = |x-1|\left|1+\frac{2}{x}\right| <$$
$$\overset{(1)}{<} \delta\left(1+\frac{2}{|x-1+1|}\right) \overset{(2)}{<} \delta\left(1+\frac{2}{1-\delta}\right) \overset{(3)}{\leq} 5\delta$$

dove

(1) È giustificata dalla *disuguaglianza triangolare* valida per il modulo:

$$\forall A, B \in \mathbb{R} : \; |A + B| \leq |A| + |B| \, .$$

(2) Ancora per la disuguaglianza triangolare abbiamo $\forall A, B \in \mathbb{R} : \; |A + B| \geq |A| - |B|$, per cui abbiamo

$$|1 + x - 1| \geq 1 - |x - 1| > 1 - \delta \implies \frac{2}{|x - 1 + 1|} < \frac{2}{1 - \delta}.$$

(3) È giustificata dal prendere un δ abbastanza piccolo:

$$\delta \leq \frac{1}{2} \implies 1 - \delta \geq \frac{1}{2} \implies \frac{2}{1 - \delta} \leq 4.$$

Quindi, scegliendo $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ (più precisamente $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{5}\right)$), otteniamo

$$|x - 1| < \delta \implies \left| \frac{x^2 + 2x - 2}{x} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Esercizio 2. Mostrare che i seguenti limiti non esistono

Per mostrare la non esistenza di un limite finito si può utilizzare l'equivalenza dell'esistenza di un limite con la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0 : \; \exists \delta > 0 \mid \forall x, y \in I(a, \delta) : \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Quest'equivalenza, che riporta la definizione di limite a una proprietà in cui non compare il valore del limite stesso, è valida perché siamo in $\mathbb{R}$. (Più in generale vale per i campi *completi*)

Quindi, per dimostrare che un limite $\lim_{x \to a} f(x)$ *non esiste finito*, possiamo mostrare che

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall \delta > 0 : \; \exists x, y \in I(a, \delta) \mid |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Per escludere anche la non esistenza del limite *infinito* condizione necessaria e sufficiente è che:

$$\exists M \mid \forall \delta : \; \exists x \in I(a, \delta) \mid f(x) \leq M$$

per escludere $+\infty$, e

$$\exists M \mid \forall \delta : \; \exists x \in I(a, \delta) \mid f(x) \geq M$$

per escludere $-\infty$. Alternativamente condizione sufficiente ma non necessaria è che la funzione sia limitata in un certo intorno di a, ovvero:

$$\exists M, N, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I(a, \delta) : \; M < f(x) < N.$$

Nel caso a sia infinito bisogna come al solito sostituire l'intorno $I(a, \delta)$ con l'intervallo $(N, +\infty)$ per $a = +\infty$ e con $(-\infty, N)$ per $a = -\infty$.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sin x + \cos x) \, ,$

Possiamo escludere che la funzione abbia un limite infinito perché è limitata:

$$\forall x : \; |\sin x + \cos x| \leq |\sin x| + |\cos x| \leq 2.$$

Per escludere che abbia un limite finito, sfruttiamo il fatto che

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \sin(2k\pi) + \cos(2k\pi) = 1 \qquad \sin((2k+1)\pi) + \cos((2k+1)\pi) = -1.$$

Scegliamo quindi $\varepsilon = 2 = |1 - (-1)|$, e $\forall N$ scegliamo $x = ([N]+1)\pi$ e $y = ([N]+2)\,\pi$, dove $[N]$ è la parte intera di N. Sia che $[N]$ sia pari o che sia dispari $\sin(x) + \cos(x) = \pm 1$ e $\sin(y) + \cos(y) = \mp 1$ (il valore opposto). Quindi:

$$\forall N : x := [N]+1, y := [N]+2 : x, y \in (N, +\infty) \wedge |\sin(x) + \cos(x) - \sin(y) - \cos(y)| = 2 \geq \varepsilon.$$

b. $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

La funzione è limitata in quanto per $x > 0$ abbiamo $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$ e per $x < 0$ abbiamo $\frac{|x|}{x} = -1$. Per lo stesso motivo possiamo scegliere $\varepsilon = 2$, e per ogni $\delta > 0$ scegliamo $x = \frac{\delta}{2}$ e $y = -\frac{\delta}{2}$ ottenendo:

$$\forall \delta > 0 : x := \frac{\delta}{2}, y := -\frac{\delta}{2} : x, y \in I(0, \delta) \wedge \left| \frac{|x|}{x} - \frac{|y|}{y} \right| = |1 - (-1)| = 2 \geq \varepsilon.$$

c. $\lim_{x \to 0} \chi(x)$, dove $\chi(x)$ è la *funzione di Dirichelet*, definita da

$$\chi(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

La funzione è chiaramente limitata. Inoltre per ogni $\delta > 0$ scegliamo un qualunque $x \in \mathbb{Q} \cap I(0, \delta)$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap I(0, \delta)$ (entrambi esistono per densità di $\mathbb{Q}$ e del suo complementare in $\mathbb{R}$), ottenendo facilmente (scegliendo $\varepsilon = 1$):

$$\forall \delta : x, y \in I(0, \delta) \wedge |\chi(x) - \chi(y)| = |1 - 0| = 1.$$

Esercizio 3. Ricordiamo la definizione di limite (con a e b finiti):

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \mid \forall x, |x - a| < \delta : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Mostrare che la definizione è equivalente alla seguente, fissati un $\varepsilon_0 > 0$ e un $\delta_0 > 0$:

$$\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 : \exists 0 < \delta \leq \delta_0 \mid \forall x, |x - a| < \delta : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Tale equivalenza è quanto giustifica poter affermare *per un ε abbastanza piccolo* o *prendendo un δ abbastanza piccolo* nella definizione di limite.

Dimostrazione. Sia P la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x, |x - a| < \delta(\varepsilon) : |f(x) - b| < \varepsilon,$$

e Q la definizione alternativa data nell'esercizio, ovvero (cambiando nome alle variabili):

$$\forall 0 < \varepsilon' \leq \varepsilon_0 : \exists 0 < \delta'(\varepsilon') \leq \delta_0 \mid \forall x, |x - a| < \delta'(\varepsilon') : |f(x) - b| < \varepsilon'.$$

$P \Rightarrow Q$) Sia ε' un qualunque valore $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon_0$. Grazie a P, abbiamo $\delta(\varepsilon')$ che ci assicura

$$|x-a| < \delta(\varepsilon') : |f(x)-b| < \varepsilon'.$$

Scegliendo $\delta'(\varepsilon') := \min(\delta_0, \delta(\varepsilon'))$ abbiamo per definizione $0 < \delta'(\varepsilon') \leq \delta_0$, e oltretutto:

$$|x-a| < \delta'(\varepsilon') \implies |x-a| < \delta(\varepsilon') \implies |f(x)-b| < \varepsilon'.$$

$P \Leftarrow Q$) Sia ε un qualunque valore $0 < \varepsilon$. Visto che $0 < \min(\varepsilon_0, \varepsilon) \leq \varepsilon_0$, grazie a Q otteniamo $\delta'(\min(\varepsilon_0, \varepsilon))$. Ponendo $\delta(\varepsilon) := \delta'(\min(\varepsilon_0, \varepsilon))$:

$$|x-a| < \delta'(\min(\varepsilon_0, \varepsilon)) \implies |f(x)-b| < \varepsilon' \leq \varepsilon.$$

$\square$