Università degli Studi "Roma Tre"
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Esercitazione 7 – 19 Novembre

(a cura di Paolo Tranquilli)

Esercizio 1. Verificare mediante la definizione che valgono i seguenti limiti.

a. $\lim_{x\to 1} (\sin \pi x + x) = 1$,

b. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2x^2+1} = \frac{1}{2}$,

c. $\lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$,

d. $\lim_{x\to -\infty} e^x \cdot 2^{-x} = 0$,

e. $\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\log^2 x}{\log x} = +\infty$,

f. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-1}{x} = 1$,

Esercizio 2. Mostrare che i seguenti limiti non esistono:

a. $\lim_{x\to +\infty} (\sin x + \cos x)$,

b. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

c. $\lim_{x\to 0} \chi(x)$, dove $\chi(x)$ è la *funzione di Dirichelet*, definita da

$$\chi(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esercizio 3. Ricordiamo la definizione di limite (con a e b finiti):

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \mid \forall x, |x-a| < \delta : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Mostrare che la definizione è equivalente alla seguente, fissati un $\varepsilon_0 > 0$ e un $\delta_0 > 0$:

$$\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 : \exists 0 < \delta \leq \delta_0 \mid \forall x, |x-a| < \delta : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Tale equivalenza è quanto giustifica poter affermare *per un ε abbastanza piccolo* o *prendendo un δ abbastanza piccolo* nella definizione di limite.