Università degli Studi "Roma Tre"
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Esercitazione 5 – 29 Ottobre

(a cura di Paolo Tranquilli)

Soluzioni

Esercizio 1. Specificare i punti di accumulazione dei seguenti insiemi, e specificare se sono insiemi aperti, chiusi o nessuno dei due. Se un insieme è inoltre accompagnato da una x, mostrare che tale x è isolata nell'insieme corrispondente.

a. $S := \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

$\mathcal{D}(S) = \{0\}$. Infatti $\forall \varepsilon > 0$ bisogna trovare $a \in I(0, \varepsilon) \cap S \setminus \{0\}$, dove $I(x_0, r)$ è l'intervallo aperto di raggio r intorno a x_0, o in formula

$$I(x_0, r) := \{\, a \in \mathbb{R} \mid |a - x_0| < r \,\}.$$

Quindi in questo caso bisogna trovare (notare che $0 \notin S$) n tale che

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

quindi un $n > \frac{1}{\varepsilon}$ che esiste sempre.

$x = \frac{1}{4}$ è isolato. Innanzitutto $x = \frac{(-1)^4}{4} \in S$. A questo punto cerchiamo un r tale che $\left(I\left(\frac{1}{4}, r\right) \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}\right) \cap S = \emptyset$. Serve un qualunque r, ma in generale lo cerchiamo come la più piccola distanza da un altro punto di S. In questo caso i punti più vicini a $\frac{1}{4}$ sono $\frac{1}{2}$ sopra e $\frac{1}{6}$ sotto. Prendiamo quindi $r = \frac{1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$. Ora mostriamo che tale r va bene, ovvero dobbiamo mostrare che è impossibile che un punto $a \in S$ diverso da $\frac{1}{4}$ sia dentro $I\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$.

Per n dispari $\frac{(-1)^n}{n} < 0 \leq \frac{1}{8}$ quindi certamente non è in $\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$. Per n pari, diverso da 4, abbiamo $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{3}$ per $n = 2$, e $\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{6}$ per $n \geq 6$. In definitiva:

$$\forall n : \ \frac{(-1)^n}{n} \notin \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}.$$

S non è chiuso in quanto non contiente i suoi punti di accumulazione. S non è nemmeno aperto in quanto ha un punto isolato.

b. $S := \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup \{0\}$,

$\mathcal{D}(S) = \{0\}$ come prima. S è chiuso in quanto contiene il suo derivato.

c. $S := \left\{ \dfrac{(n-1)^2}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup [-1, 0)$,

$\mathcal{D}(S) = [-1, 0] \cup \{1\}$. Infatti $\mathcal{D}\big([-1,0)\big) = [-1,0]$. Inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon > \left| \frac{(n-1)^2}{n^2+1} - 1 \right| = \left| \frac{n^2-2n+1}{n^2+1} - 1 \right| = \left| -\frac{2n}{n^2+1} \right| = \frac{2n}{n^2+1}$$

se e solo se $\varepsilon n^2 - 2n + \varepsilon > 0 \iff n > \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$ e tale n esiste sempre.

$x = \dfrac{1}{5} = \dfrac{(2-1)^2}{2^2+1} \in S$. Mostriamo che $I\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\} = \left(0, \frac{2}{5}\right) \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\}$ è tutto fuori S. Per $n = 0$ e $n = 1$ abbiamo 1 e 0 rispettavimente che sono fuori l'intervallo. Per $n > 2$ ho

$$\frac{2}{5} \leq \frac{(n-1)^2}{n^2+1} \iff 2n^2+2 \leq 5n^2-10n+5 \iff 3n^2-10n+3 \geq 0 \iff n \geq 3 \vee n = 0,$$

quindi sempre, quanto basta per dire che $\forall n \neq 2 : \frac{(n-1)^2}{n^2+1} \notin \left(0, \frac{2}{5}\right)$, e che dunque $\frac{2}{5}$ è isolato.

d. $\left\{ \sin \dfrac{n\pi}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$,

e. $\left\{ a \in \mathbb{R} \mid a^2 + 2na + 1 = 0, n \in \mathbb{N} \right\}$

Si tratta di mettere insieme tutte le soluzioni di $a^2 + 2na + 1 = 0$. Il discrimante è $4n^2 - 4 = 4(n^2-1)$. Per $n = 0$ non ci sono soluzioni. Per $n = 1$ ho la soluzione $a = -1$. Per $n > 1$ ho le soluzioni $a = -n \pm \sqrt{n^2-1}$. I punti $-n + \sqrt{n^2-1}$ si accumulano verso 0, infatti per ogni $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon > \left| -n + \sqrt{n^2-1} \right| = n - \sqrt{n^2-1} \iff \sqrt{n^2-1} > n - \varepsilon \iff$$

$$\iff n^2 - 1 > n^2 - 2\varepsilon n + \varepsilon^2 \iff n > \frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon}.$$

e tale n esiste.

In definitiva $\mathcal{D}(S) = \{0\}$.

$x = -1 \in S$ come già visto. Mostriamo che $I\left(-1, \frac{1}{2}\right) \setminus \{-1\} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \setminus \{-1\}$ non contiene punti di S. In realà la distanza minima da un altro punto di S è $\sqrt{3} - 1$, ma per non complicare i calcoli possiamo anche usare come raggio $\frac{1}{2} < \sqrt{3} - 1$ (considerando che $\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 = \frac{9}{4} < 3$). Per i punti $-n - \sqrt{n^2-1}$ si ha facilmente con $n \geq 2$: $-n - \sqrt{n^2-1} \leq -2 - \sqrt{3} \leq -\frac{3}{2}$. Per i punti $-n + \sqrt{n^2-1}$ abbiamo

$$-\frac{1}{2} \leq -n + \sqrt{n^2-1} \iff 2n - 1 \leq 2\sqrt{n^2-1} \iff$$

$$\iff 4n^2 - 4n + 1 \leq 4n^2 - 4 \iff n \geq \frac{5}{4}$$

che per $n \geq 2$ vale sempre.

S non è né aperto né chiuso.

f. $S := \left\{ m + \dfrac{1}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

$\mathcal{D}(S) = \mathbb{N}$. Infatti per ogni $k \in \mathbb{N}$, cerco per ogni $\varepsilon > 0$ un elemento in S della forma $k + \frac{1}{n} \neq k$ tale che

$$\varepsilon > \left| k + \frac{1}{n} - k \right| = \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{\varepsilon},$$

e tale n esiste.

$x = \dfrac{101}{2} = 50 + \dfrac{1}{2} \in S$, e mostriamo che $I\left(\frac{101}{2}, \frac{1}{6}\right) = \left(50 + \frac{1}{3}, 50 + \frac{2}{3}\right)$ non contiene punti di S a parte $\frac{101}{2}$.

Per $m < 50$ e qualunque n ho che $m + \frac{1}{n} \leq 50 \leq 50 + \frac{1}{3}$.

Per $m > 50$ e qualunque n ho che $m + \frac{1}{n} > 51 \geq 50 + \frac{2}{3}$.

Per $m = 50$ e $n = 1$ ho che $51 \geq 50 + \frac{2}{3}$.

Per $m = 50$ e $n > 2 \implies n \geq 3$ ho $50 + \frac{1}{n} \leq 50 + \frac{1}{3}$.

In ogni caso, per $a \in S$, $a \neq \frac{101}{2}$, ho $a \notin I\left(\frac{101}{2}, \frac{1}{6}\right)$.

S non è né aperto né chiuso.

g. $\left\{ m + \dfrac{1}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup [-1, 0]$

Grazie all'esercizio di prima, possiamo dire che $\mathcal{D}(S) = [-1, 0] \cup \mathbb{N} = [-1, 0] \cup (\mathbb{N} \setminus \{0\})$. L'insieme S non è aperto, ma è chiuso perché $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ho $k = (k-1) + \frac{1}{1} \in S$.

Esercizio 2. Dimostrare le seguenti proposizioni, dove $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato:

a. Se A è chiuso allora A ha massimo e minimo.

Mostriamo che $\sup A \in A$, supponendo per assurdo che $\sup A \notin A$. Ciò implicherebbe che $\sup A \in \mathbb{R} \setminus A$, insieme aperto visto che A è chiuso. Quindi esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $I(\sup A, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$. In particolare

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall x, \sup A - \varepsilon < x \leq \sup A : \ x \notin A$$

che è l'esatto opposto della definizione di sup, per cui arriviamo a un assurdo. Quindi $\sup A \in A$ ovvero $\sup A = \max A$. La dimostrazione si adatta senza problemi all'inf e al minimo.

b. Se $\sup A \notin A$ allora $\sup A$ è un punto di accumulazione per A.

Abbiamo dalla definizione di $\sup A$ che

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists x \in A \mid \sup A - \varepsilon < x \leq \sup A.$$

$x \in A$ e $\sup A \notin A$ ci assicura che $x \neq \sup A$, per cui la proprietà di x diventa:

$$\sup A - \varepsilon < x < \sup A \implies x \in I(\sup A, \varepsilon) \setminus \{\sup A\},$$

che è quanto basta per assicurare $\sup A \in \mathcal{D}(A)$.

c. $\sup A$ è punto d'accumulazione per A se e solo se $\sup A = \sup(A \setminus \{\sup A\})$.

Sia $B := A \setminus \{\sup A\}$.

Supponiamo $\sup A \neq \sup B$. Visto che $B \subseteq A$ certamente $\sup B < \sup A$. Ora, scegliendo $\varepsilon = \sup A - \sup B$, ho che per ogni $x \in A$ tale che $x \neq \sup A$ (ovvero $\forall x \in B$) vale $x \leq \sup B$ (proprietà di maggiorante di $\sup B$), che implica $x \notin I(\sup A, \varepsilon)$. Questo ci dice che $\sup A \notin \mathcal{D}(A)$.

Viceversa, supponiamo $\sup A = \sup B$. Per come è definito B ho che $\sup B \notin B$, quindi per il punto precedente $\sup A = \sup B$ è punto di accumulazione per B, e quindi anche per A.

(N.B. Come per qualunque proposizione, non esiste necessariamente un'unica dimostrazione...)