Università degli Studi "Roma Tre"
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Esercitazione 5 – 29 Ottobre

(a cura di Paolo Tranquilli)

Esercizio 1. Specificare i punti di accumulazione dei seguenti insiemi, e specificare se sono insiemi aperti, chiusi o nessuno dei due. Se un insieme è inoltre accompagnato da una x, mostrare che tale x è isolata nell'insieme corrispondente.

a. $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$,
$x = \frac{1}{4}$,

b. $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup \{0\}$,

c. $\left\{ \frac{(n-1)^2}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup [-1, 0)$,
$x = \frac{1}{5}$.

d. $\left\{ \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} \sin \frac{n\pi}{2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$,

e. $\left\{ a \in \mathbb{R} \mid a^2 + 2na + 1 = 0, n \in \mathbb{N} \right\}$,
$x = -1$,

f. $\left\{ m + \frac{1}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$,
$x = \frac{101}{2}$,

g. $\left\{ m + \frac{1}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup [-1, 0]$.

Esercizio 2. Dimostrare le seguenti proposizioni, dove $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato:

a. Se A è chiuso allora A ha massimo e minimo.

b. Se $\sup A \notin A$ allora $\sup A$ è un punto di accumulazione per A.

c. $\sup A$ è punto d'accumulazione per A se e solo se $\sup A = \sup(A \setminus \{\sup A\})$.