Università degli Studi "Roma Tre"
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Esercitazione 4 – 22 Ottobre

(a cura di Paolo Tranquilli)

Soluzioni

Esercizio 1. Dimostrare per induzione i seguenti enunciati.

a. $\forall \mu_1, \ldots, \mu_n, \mu_i \in [0,1] : \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \mu_i$

base Per 0 verifico che $\prod \emptyset = 1 \geq 1 = 1 - \sum \emptyset$.

passo

$$\prod_{i=1}^{m+1}(1-\mu_i) = (1-\mu_{m+1})\prod_{i=1}^{m}\mu_i \overset{\text{h.i.}}{\geq} (1-\mu_{m+1})\left(1-\sum_{i=1}^{m}\mu_i\right),$$

dove per propagare la stima data dall'ipotesi induttiva utilizzo il fatto che $\mu_{m+1} \leq 1 \implies 1 - \mu_{m+1} \geq 0$.

$$(1-\mu_{m+1})\left(1-\sum_{i=1}^{m}\mu_i\right) = 1 - \left(\mu_{m+1} + \sum_{i=1}^{m}\mu_i\right) + \mu_{m+1}\sum_{i=1}^{m}\mu_i \geq 1 - \sum_{i=1}^{m+1}\mu_i,$$

dove utilizzo il fatto che $\forall i : \mu_i \geq 0 \implies \mu_{m+1}\sum_{i=1}^{m}\mu_i \geq 0$.

b. $\forall A, B$ insiemi finiti, B non vuoto : $\#\left(B^A\right) = \# B^{\# A}$

Mostro che $\forall n, \forall A, \# A = n : \ \#\left(B^A\right) = \# B^{\# A}$.

base $n = 0 \iff A = \emptyset$. Esiste un'unica funzione di dominio vuoto e codominio dato. Per giustificare quest'affermazione non molto intuitiva, consideriamo le funzioni come particolari relazioni (quindi sottoinsiemi del prodotto cartesiano di dominio e codominio). Abbiamo $\emptyset \times B = \emptyset$, e verifichiamo che la relazione vuota $F = \emptyset \subseteq \emptyset \times B$ (unico possibile sottoinsieme di tale prodotto cartesiano) è effettivamente una funzione. Questo richiede che si verifichi $\forall x \in A : \exists! y \in B \mid (x,y) \in F$. Ma qui $A = \emptyset$, quindi la proposizione è vera. (In generale $\forall x \in \emptyset : \ P[x]$ è vera qualunque sia P).
Concludendo: $\#\left(B^\emptyset\right) = 1 = \# B^0 = \# B^{\# \emptyset}$.

passo Sia A insieme di cardinalità $m+1$. Scegliamo un qualunque $a \in A$ e consideriamo $A' := A \setminus \{a\}$ (quindi $\# A' = m$). Ora ogni funzione da A in B è biunivocamente definita da una funzione da A' in B e un elemento di B da assegnare ad a. Infatti dati $f : A' \to B$ e $b \in B$ posso definire $\tilde{f}_b : A \to B$ ponendo

$$\tilde{f}_b(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq a, \\ b & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Viceversa data $g : A \to B$ ho la coppia $g|_{A'} : A' \to B$ (g ristretta ad A') e $g(a) \in B$. Le due operazioni sono chiaramente inverse. Quindi:

$$\#\left(B^A\right) = \#\left(B^{A'} \times B\right) = \#\left(B^{A'}\right) \cdot \# B \overset{\text{h.i.}}{=} \# B^m \cdot \# B = \# B^{m+1} = \# B^{\# A}.$$

Esercizio 2. La *successione di Fibonacci* è definita induttivamente nel seguente modo:

$$F_0 := 0, \qquad F_1 := 1, \qquad F_{n+2} := F_{n+1} + F_n.$$

Mostrare per induzione che:

a. $\forall n \geq 1 : \ F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^n$

base Per 1 verifico che $F_1^2 = 1 = 0 \cdot 1 + 1 = F_0 F_2 - (-1)^1$.

passo L'ipotesi induttiva è $F_m^2 = F_{m-1}F_{m+1} - (-1)^m$. Dobbiamo mostrare $F_{m+1}^2 = F_m F_{m+2} - (-1)^{m+1}$. Partiamo dal membro di destra di quest'uguaglianza:

$$\begin{aligned} F_{m+2}F_m - (-1)^{m+1} &\overset{\text{def}}{=} (F_{m+1} + F_m)F_m + (-1)^m = \\ &= F_{m+1}F_m + F_m^2 + (-1)^m \overset{\text{h.i.}}{=} F_{m+1}F_m + F_{m-1}F_{m+1} - (-1)^m + (-1)^m = \\ &= F_{m+1}(F_m + F_{m-1}) \overset{\text{def}}{=} F_{m+1}F_{m+1} = F_{m+1}^2. \end{aligned}$$

b. $\forall n : \ F_n = \dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \dfrac{(1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$, dove ϕ è $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, la cosiddetta *sezione aurea*

base Per 0 verifico che $\frac{\phi^0}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\phi)^0}{\sqrt{5}} = 0 = F_0$. Per 1 verifico che

$$\frac{\phi^1}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\phi)^1}{\sqrt{5}} = \frac{2\phi - 1}{\sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}} = 1 = F_1.$$

passo Da notare la versione leggermente differente del principio di induzione: come passo mostriamo $(P[m] \wedge P[m+1]) \implies P[m+2]$ (questo per il modo in cui è definita la successione). Più in generale il classico principio di induzione è equivalente al seguente.

> Se vale $P[0]$ (base) e $\forall m > 0 : (\forall k < m : P[k]) \implies P[m]$ (passo) allora vale $\forall n : P[n]$.

Ovvero sostituisco l'ipotesi induttiva con una più forte: non più che l'enunciato valga per il predecessore, ma che valga per tutti i naturali che vengono prima m. Qui in particolare ho bisogno di avere nell'ipotesi induttiva l'enunciato per i 2 naturali subito prima.
Allora:

$$\begin{aligned} F_{m+2} = F_{m+1} + F_m &\overset{\text{h.i.}}{=} \frac{\phi^{m+1}}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\phi)^{m+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^m}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\phi)^m}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{\phi^m(\phi+1)}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\phi)^m(1-\phi+1)}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Per ottenere quello che mi serve, ovvero ϕ^{m+2} e $(1-\phi)^{m+2}$ invece di $\phi^m(\phi+1)$ e $(1-\phi)^m(2-\phi)$, mi basta mostrare che $\phi + 1 = \phi^2$ e $2 - \phi = (1-\phi)^2$. Infatti:

- $\phi^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- $(1-\phi)^2 = 1 - 2\phi + \phi^2 = 1 - 2\phi + 1 + \phi = 2 - \phi$.

Esercizio 3. Trovare estremo inferiore e superiore dei seguenti insiemi, specificando se siano eventualmente massimo o minimo.

a. $S := \left\{ n - \sqrt{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

$\min S = -1$:

- minorante:

$$-1 \le n - \sqrt{n^2+1} \iff \sqrt{n^2+1} \le n+1 \iff n^2+1 \le n^2+2n+1 \iff 0 \le n.$$

- minimo: $-1 = 0 - \sqrt{0^2+1} \in S$.

$\sup S = 0$:

- maggiorante:

$$0 \ge n - \sqrt{n^2+1} \iff \sqrt{n^2+1} \ge n \iff n^2+1 \ge n^2 \iff 1 \ge 0.$$

- estremo superiore: per ogni $\varepsilon > 0$

$$0 - \varepsilon < n - \sqrt{n^2+1} \iff \sqrt{n^2+1} < n+\varepsilon \iff n^2+1 < n^2+2\varepsilon n+\varepsilon^2 \iff n > \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}$$

e tale n esiste.

b. $S := \left\{ (-1)^n \left(\frac{n^2-1}{3n^2} + \frac{2}{3} \right) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

$$\frac{n^2-1}{3n^2} + \frac{2}{3} = \frac{3n^2-1}{3n^2}$$

$\inf S = -1$:

- minorante: per ogni n pari

$$-1 \le \frac{3n^2-1}{3n^2} \iff -3n^2 \le 3n^2 - 1 \iff n \ge \frac{1}{\sqrt{6}}$$

valida per ogni $n \ge 1$. Per ogni n dispari

$$-1 \le -\frac{3n^2-1}{3n^2} \iff -3n^2 \le -3n^2+1 \iff 0 \le 1.$$

- estremo inferiore: per ogni $\varepsilon > 0$, cerchiamo un n *dispari* tale che

$$-1 + \varepsilon > -\frac{3n^2-1}{3n^2} \iff -3n^2 + 3\varepsilon n^2 > -3n^2 + 1 \iff n > \frac{1}{\sqrt{3\varepsilon}}$$

e tale n esiste.

$\sup S = 1$: si può ripercorrere il ragionamento fatto per l'inf scambiando il ruolo di pari e dispari e cambiando di segno le disuguaglianze.

c. $S := \left\{ (-1)^n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

$(-1)^n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = (-1)^n - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

$\min S = -1 - \log 2$:

- minorante:

$$n \geq 1 \implies \frac{1}{n} \leq 1 \implies 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \implies \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \log 2 \implies$$
$$\implies (-1)^n - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq -1 - \log 2.$$

- minimo:

$$-1 - \log 2 = (-1)^1 - \log\left(1+\frac{1}{1}\right) \in S.$$

$\sup S = 1$:

- maggiorante:

$$\frac{1}{n} \geq 0 \implies -\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq -\log 1 = 0 \implies (-1)^n - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1.$$

- estremo superiore: per ogni $\varepsilon > 0$ cerchiamo un n pari tale che:

$$1 - \varepsilon < 1 - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \iff \varepsilon > \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \iff e^{\varepsilon} - 1 > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{e^{\varepsilon} - 1}$$

  e tale n esiste.

d. $S := \left\{ e^{1-n^2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

$\inf S = 0$:

- minorante: $e^{1-n^2} \geq 0$.
- estremo inferiore: per ogni $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon > e^{1-n^2} \iff \log \varepsilon > 1 - n^2 \iff n^2 > 1 - \log \varepsilon$$

  e tale n esiste.