Università degli Studi "Roma Tre"
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Esercitazione 4 – 22 Ottobre

(a cura di Paolo Tranquilli)

Esercizio 1. Dimostrare per induzione i seguenti enunciati.

a. $\forall \mu_1, \dots, \mu_n, \mu_i \in [0,1] : \prod_{i=1}^{n}(1-\mu_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \mu_i$;

b. $\forall A, B$ insiemi finiti, B non vuoto : $\#\left(B^A\right) = \# B^{\# A}$, dove $B^A := \{, f : A \to B\}$.

Esercizio 2. La *successione di Fibonacci* è definita induttivamente nel seguente modo:

$$F_0 := 0, \qquad F_1 := 1, \qquad F_{n+2} := F_{n+1} + F_n.$$

Mostrare per induzione che:

a. $\forall n \geq 1 : F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^n$;

b. $\forall n : F_n = \dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \dfrac{(1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$, dove ϕ è $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, la cosiddetta *sezione aurea*.

Esercizio 3. Trovare estremo inferiore e superiore dei seguenti insiemi, specificando se siano eventualmente massimo o minimo.

a. $\left\{ n - \sqrt{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$;

b. $\left\{ (-1)^n \left(\dfrac{n^2-1}{3n^2} + \dfrac{2}{3} \right) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$;

c. $\left\{ (-1)^n + \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$;

d. $\left\{ e^{1-n^2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.