Università degli Studi "Roma Tre"
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Esercitazione 3 – 12 Ottobre

(a cura di Paolo Tranquilli)

Soluzioni

Esercizio 1. Trovare per quali valori reali di x valgono le seguenti disuguaglianze.

a. $\sqrt{x+1} - x > 0$;

Campo d'esistenza: $x \geq -1$.

Si deve risolvere $\sqrt{x+1} > x$, si suddivide in casi:

$x < 0$: $\sqrt{x+1} \geq 0 > x$, quindi sempre.

$x \geq 0$: $\sqrt{x+1} > x \iff x+1 > x^2 \iff x^2 - x - 1 < 0 \iff \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, quindi $0 \leq x < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, visto che $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < 0$.

La soluzione è $-1 \leq x < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, o equivalentemente $x \in \left[-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

b. $9^x - e^{x^2+1} \geq 0$;

$9^x \geq e^{x^2+1} \iff \log 3^{2x} \geq \log e^{x^2+1} \iff 2x \log 3 \geq x^2 + 1 \iff x^2 - 2x\log 3 + 1 \leq 0$.

$\Delta = 4\log^2 3 - 4 = 4(\log^2 3 - 1) > 0$ (visto che $3 > e \implies \log 3 > \log e = 1$).

La soluzione è $\log 3 - \sqrt{\log^2 3 - 1} \leq x \leq \log 3 - \sqrt{\log^2 3 - 1}$.

Esercizio 2. Dimostrare per induzione le seguenti proposizioni:

a. $\forall n \in \mathbb{N} : \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$;

base $\sum_{k=0}^{-1} 2^k = 0$; $2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$;

passo ipotesi induttiva: $\sum_{k=0}^{m-1} 2^k = 2^m - 1$.

$\sum_{k=0}^{m} 2^k = 2^m + \sum_{k=0}^{m-1} 2^k \overset{\text{h.i.}}{=} 2^m + 2^m - 1 = 2 \cdot 2^m - 1 = 2^{m+1} - 1$.

b. $\forall n \in \mathbb{N} : n! \geq 2^{n-1}$;

base Per $n = 0$: $0! = 1 \geq \frac{1}{2} = 2^{-1}$; per $n = 1$: $1! = 1 \geq 1 = 2^0$;

passo sia $m \geq 1$ qualunque, che implica $m + 1 \geq 2$. Ipotesi induttiva: $m! \geq 2^{m-1}$.

$(m+1)! = (m+1)m! \geq (m+1)2^{m-1} \geq 2 \cdot 2^{m-1} = 2^m$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^k - 1}{a - 1}$;

base $\sum_{k=0}^{-1} a^k = 0$; $\frac{a^0-1}{a-1} = 0$;

passo ipotesi induttiva: $\sum_{k=0}^{m-1} a^k = \frac{a^m-1}{a-1}$.

$\sum_{k=0}^{m} a^k = a^m + \sum_{k=0}^{m-1} a^k \overset{\text{h.i.}}{=} a^m + \frac{a^m-1}{a-1} = \frac{a^m(a-1)+a^m-1}{a-1} = \frac{a^{m+1}-a^m+a^m-1}{a-1} = \frac{a^{m+1}-1}{a-1}$.

Come termine di paragone, ecco una dimostrazione della medesima proposizione non fatta per induzione.

Innanzitutto si ha che $a \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} a^k$. Ora sia $n \geq 1$ qualunque (per $n = 0$ la proposizione è banalmente vera). Si ha che:

$$(a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k = a \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \sum_{k=1}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^k = a^n - 1$$

da cui il risultato $\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n-1}{a-1}$ dividendo entrambi i membri di qui sopra per $a-1$. L'ultima uguaglianza di qui sopra è giusitifcata dal fatto che nella differenza di somme si cancellano tutti i termini in comune. Della prima somma rimane solo il termine per $k = n$, della seconda quello per $k = 0$.

Si può dire che tale dimostrazione richieda più "fantasia" per essere trovata rispetto a quella per induzione. La dimostrazione per induzione è uno strumento standard che risolve la gran parte delle dimostrazioni su $\mathbb{N}$.

Esercizio 3. Trovare l'errore nella seguente dimostrazione.

Proposizione. Qualunque sia il numero di studenti che prende parte all'esame, il voto è lo stesso per tutti.

Dimostrazione. Sia $n \geq 1$ il numero di studenti che prende parte all'esame. Supponiamoli ordinati, ovvero possiamo indicare ciascun studente con un numero, e l'insieme di studenti S con $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sia $v(i)$ il voto dello studente i. Mostriamo per induzione su n che v è costante.

base $S = \{1\}$, e chiaramente la funzione v su un elemento è costante.

passo L'ipotesi induttiva è che per qualunque insieme di n studenti il voto è costante. Prendiamo un insieme S di $n+1$ studenti. Denotiamo con S' l'insieme dei primi n studenti di S, e con S'' l'insieme degli ultimi n studenti di S.

$$S = \{\, \overbrace{1, \underbrace{2, \ldots, n}_{}}^{S'}\underbrace{, n+1}_{S''} \,\}$$

Prendiamo uno studente i in $S' \cap S''$. Visto che $i, n+1 \in S''$, allora $v(n+1) = v(i)$. Daltronde, essendo $i \in S'$, $v(i)$ è il voto costante su S'. Infine, chiaramente $S = S' \cup \{n+1\}$, quindi $v(n+1)$ è lo stesso voto di tutto S, ovvero v è costante.

□

L'errore è nel passo, il quale dovrebbe valere per ogni $n \geq 1$, ma proprio in $n = 1$ si ha che $S' = \{1\}$ e $S'' = \{2\}$, per cui $S' \cap S'' = \emptyset$, e non c'è nessun $i \in S' \cap S''$ per far funzionare il passo.

Esercizio 4. Trovare estremi superiore e inferiore dei seguenti insiemi, specificando se sono rispettivamente minimo e massimo.

a. $S := \left\{ \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$;

$\max S = 1$:

$1 \geq \frac{1}{n} \iff 1 \leq n \iff n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$1 = \frac{1}{1} \in S$.

$\inf S = 0$:

$0 < \frac{1}{n}$.

$0 + \varepsilon \geq \frac{1}{n} \iff n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, e un tale n esiste per ogni $\varepsilon > 0$, ad esempio $n = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$.

$(\lceil x \rceil := \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid n \geq x \,\})$

b. $S := \left\{ \dfrac{n-3}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup \left(\dfrac{1}{2}, 1 \right)$;

$\sup S = 1$:

$1 > \frac{n-3}{n^2} \iff n^2 > n - 3 \iff n^2 - n + 3 > 0$, che accade sempre $(\Delta = 1 - 12 < 0)$. $1 > x$ per ogni $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

$1 - \varepsilon \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \implies \exists x \in S : \, x \geq 1 - \varepsilon$ ($1 - \varepsilon$ stesso).

$\min S = -2$:

$-2 \leq \frac{n-3}{n^2} \iff -2n^2 \leq n - 3 \iff 2n^2 + n - 3 \geq 0$, $\Delta = 25$, accade per $n \leq -\frac{3}{2} \vee n \geq 1$, ovvero sempre. $-2 \leq x$ per ogni $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

$-2 = \frac{1-3}{1^2} \in S$.

c. $S := \left\{ \dfrac{n-3}{n^2} \mid n \in \mathbb{N},\, n > 3 \right\} \cup \left(\dfrac{1}{2}, 1 \right)$;

$\sup S = 1$:

Già mostrato nell'esercizio precedente.

$\inf S = 0$:

$0 < \frac{n-3}{n^2} \iff n - 3 > 0 \iff n > 3$, ovvero sempre. $0 < x$ per ogni $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

$0 + \varepsilon \geq \frac{n-3}{n^2} \iff \varepsilon n^2 \geq n - 3 \iff \varepsilon n^2 - n + 3 \geq 0$. Essendo una parabola con la concavità verso l'alto $(\varepsilon > 0)$, certamente ha dei punti sopra 0. Se si vuole trovarli esplicitamente: $\Delta = 1 - 12\varepsilon$. Per $\varepsilon < \frac{1}{12}$ (è sempre vera per gli altri ε) si deve trovare un $n \geq \frac{1+\sqrt{1-12\varepsilon}}{2\varepsilon}$. Ad esempio $n = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil \geq \frac{1+1}{2\varepsilon} \geq \frac{1+\sqrt{1-12\varepsilon}}{2\varepsilon}$.

d. $S := \left\{ \cos(n\pi) \dfrac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$;

$\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

$\sup S = 1$:

$1 > (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$:

per $n = 2k+1$ dispari è vera, in quanto $-1 + \frac{1}{2k+2} \leq 0 < 1$.

Per $n = 2k$ pari $1 > 1 - \frac{1}{2k+1} \iff \frac{1}{2k+1} > 0$ vera sempre.

$1 - \varepsilon \leq (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.

Cerchiamo un $n = 2k$ pari (i dispari sono sotto 0). $1 - \varepsilon \leq 1 - \frac{1}{2k+1} \iff \frac{1}{2k+1} \leq \varepsilon \iff 2k+1 \geq \frac{1}{\varepsilon} \iff k \geq \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$. Basta prendere ad esempio $n = 2\left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \right\rceil$.

$\inf S = -1$:

Ragionamento analogo a quanto fatto per il sup, scambiando il ruolo di pari e dispari.

e. $S := \left\{ 2^{-n} - 1 \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup [0, 2]$;

$\max S = 2$:

$2 \geq 2^{-n} - 1 \iff 2^{-n} \leq 3$ vera sempre ($2^{-n} \leq 1$ per $n \geq 0$). $2 \geq x$ per ogni $x \in [0, 2]$.

$2 \in [0, 2]$.

$\inf S = -1$:

$-1 < 2^{-n} - 1 \iff 0 < 2^{-n}$ che accade sempre. $0 < x$ per ogni $x \in [0, 2]$.

$-1 + \varepsilon \geq 2^{-n} - 1 \iff \varepsilon \geq 2^{-x} \iff \log_2 \varepsilon \geq -x \iff x \geq \log_2 \varepsilon$, e un tale n esiste per ogni $\varepsilon > 0$, ad esempio $n = \lceil -\log_2 \varepsilon \rceil$.

f. $S := \left\{ |x| \mid \dfrac{x-1}{x+2} < 0,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \right\}$;

$\frac{x-1}{x+2} < 0 \iff -2 < x < 1$ (studiandone il segno).

Allora per definizione di $|x|$: $S = \{ -x \mid x \in (-2, 0) \} \cup \{ x \mid x \in [0, 1) \} = (0, 2) \cup [0, 1) = [0, 2)$.

Quindi $\sup S = 2 \notin S$ e $\min S = 0$.