Università degli Studi "Roma Tre"
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

**AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008**
**Esercitazione 3 – 12 Ottobre**

(a cura di Paolo Tranquilli)

**Esercizio 1.** Trovare per quali valori reali di $x$ valgono le seguenti disuguaglianze.

**a.** $\sqrt{x+1} - x > 0$;

**b.** $9^x - e^{x^2+1} \geq 0$;

**Esercizio 2.** Dimostrare per induzione le seguenti proposizioni:

**a.** $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$;

**b.** $\forall n \in \mathbb{N} : n! \geq 2^{n-1}$;

**c.** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^k - 1}{a - 1}$;

**Esercizio 3.** Trovare l'errore nella seguente dimostrazione.

**Proposizione.** Qualunque sia il numero di studenti che prende parte all'esame, il voto è lo stesso per tutti.

*Dimostrazione.* Sia $n \geq 1$ il numero di studenti che prende parte all'esame. Supponiamoli ordinati, ovvero possiamo indicare ciascun studente con un numero, e l'insieme di studenti $S$ con $\{ 1, 2, \ldots, n \}$. Sia $v(i)$ il voto dello studente $i$. Mostriamo per induzione su $n$ che $v$ è costante.

**base** $S = \{1\}$, e chiaramente la funzione $v$ su un elemento è costante.

**passo** L'ipotesi induttiva è che per qualunque insieme di $n$ studenti il voto è costante. Prendiamo un insieme $S$ di $n+1$ studenti. Denotiamo con $S'$ l'insieme dei primi $n$ studenti di $S$, e con $S''$ l'insieme degli ultimi $n$ studenti di $S$.

$$S = \{ \overbrace{1, \underbrace{2, \ldots, n}_{}}^{S'} \underbrace{, n+1}_{S''} \}$$

Prendiamo uno studente $i$ in $S' \cap S''$ . Visto che $i, n+1 \in S''$, allora $v(n+1) = v(i)$. Daltronde, essendo $i \in S'$, $v(i)$ è il voto costante su $S'$. Infine, chiaramente $S = S' \cup \{n+1\}$, quindi $v(n+1)$ è lo stesso voto di tutto $S$, ovvero $v$ è costante.

$\square$

**Esercizio 4.** Trovare estremi superiore e inferiore dei seguenti insiemi, specificando se sono rispettivamente minimo e massimo.

**a.** $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$;

**b.** $\left\{ \frac{n-3}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup \left( \frac{1}{2}, 1 \right)$;

**c.** $\left\{ \frac{n-3}{n^2} \mid n \in \mathbb{N},\, n > 3 \right\} \cup \left( \frac{1}{2}, 1 \right)$;

**d.** $\left\{ \cos(n\pi) \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$;

**e.** $\left\{ 2^{-n} - 1 \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup [0, 2]$;

**f.** $\left\{ |x| \mid \frac{x-1}{x+2} < 0,\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \right\}$;