Università degli Studi “Roma Tre”
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Esercitazione 2 – 8 Ottobre

(a cura di Paolo Tranquilli)

Soluzioni

Esercizio 1. Trovare per quali valori reali di x valgono le seguenti disuguaglianze.

a. $\left|\cos^2 x - \sin^2 x\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Innanzitutto $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. $|\cos 2x|$ è periodica di periodo $\frac{\pi}{2}$, perché

$$\left|\cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |\cos(2x+\pi)| = |-\cos 2x| = |\cos 2x|\,,$$

quindi possiamo risolvere per qualunque intervallo di dimensione $\frac{\pi}{2}$. Può fare comodo visualizzare il grafico di $|\cos 2x|$: scegliamo l'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, dove

$$|\cos 2x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos 2x < \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \frac{\pi}{4} < 2x < \frac{3\pi}{4} \iff \frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}.$$

Per descrivere la soluzione (riportandola secondo il periodo), possiamo scrivere

$$x \in \left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z}$$

ovvero

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right);$$

oppure

$$x \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

b. $\sin 2x - \sin x < 0$

$$\sin 2x - \sin x = 2\sin x\cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1) < 0.$$

Studiando il segno dei due fattori in $[0, 2\pi)$ si ottiene che la soluzione è

$$x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

c. $\log_2(\sin x) - \log_2(\tan x) \geq -1$

La disequazione ha senso per $\sin x > 0$, ovvero $x \in (0,\pi) + 2\pi\mathbb{Z}$, e per $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} > 0$, ovvero $\cos x > 0$ (considerando che $\sin x > 0$), ovvero $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi\mathbb{Z}$, e infine (affinché tan sia definita) $\cos x \neq 0$, già compresa nelle condizioni precedenti. Quindi la disequazione è definita per $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi\mathbb{Z}$. Ora:

$$\log_2(\sin x) - \log_2\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \log_2(\sin x) - \log_2(\sin x) + \log_2(\cos x) = \log_2(\cos x);$$

$$\log_2(\cos x) < -1 \iff 2^{\log_2(\cos x)} < 2^{-1} \iff \cos x < \frac{1}{2}.$$

In $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la condizione vale per $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$. La soluzione è quindi:

$$x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

d. $1 + \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \geq \sqrt{x}$

Definita per $x \geq 0 \wedge x \neq 1$.

$$\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} - 1$$

Due casi:

$1 - \sqrt{x} > 0$ ovvero $x < 1$:

$$1 + \sqrt{x} \geq (1-\sqrt{x})(\sqrt{x}-1) = -x + 2\sqrt{x} - 1;$$

$$x - \sqrt{x} + 2 \geq 0$$

risolvendo $z^2 - z + 2 \geq 0$ si ottiene che è sempre valida.

$1 - \sqrt{x} < 0$:

$$1 + \sqrt{x} \leq (1-\sqrt{x})(\sqrt{x}-1) = -x + 2\sqrt{x} - 1;$$

che essendo l'opposto del caso precedente non è mai valida.

La soluzione è $x \in [0, 1)$.

e. $1 + \sqrt{2\log^2 x + 5\log x - 7} > \log x$

La disequazione ha senso per $x > 0$ e $2\log^2 x + 5\log x - 7 \geq 0$. La seconda condizione vale per

$$\log x \leq -\frac{7}{2} \vee \log x \geq 1 \iff x \leq \frac{1}{\sqrt{e^7}} \vee x \geq e$$

(si ottiene risolvendo la disequazione di secondo grado $2z^2 + 5z - 7$). Intersecando le condizioni si ottiene $x \geq e$.

$\sqrt{2\log^2 x + 5\log x - 7} > \log x - 1$ va divisa in due casi:

$\log x - 1 < 0$ ovvero $x < e$ che in questo caso non può accadere.

$\log x - 1 \geq 0$ con la quale condizione possiamo elevare al quadrato entrambi i membri:

$$2\log^2 x + 5\log x - 7 > \log^2 x - 2\log x + 1 \iff \log^2 x + 7\log x - 8 > 0.$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado $z^2+7z-8 > 0$ otteniamo $\log x < -8 \vee \log x > 1$ ovvero (intersecando con la condizione precedente) $x > e$.

La soluzione è quindi $x > e$.

f. $\dfrac{x^x}{\sqrt{x}} < 1$

Definita per $x > 0$.

$$\frac{x^x}{\sqrt{x}} = x^{x-\frac{1}{2}} = e^{\log\left(x^{x-\frac{1}{2}}\right)} = e^{\left(x-\frac{1}{2}\right)\log(x)} < 1 = e^0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\log(x) < 0 \iff \frac{1}{2} < x < 1.$$

Esercizio 2. Determinare al variare di a il dominio delle seguenti funzioni.

a. $f(x) = \sqrt{ax+1}$

$$ax + 1 \geq 0 \iff \begin{cases} x \leq -\frac{1}{a} & \text{se } a < 0 \\ \text{per qualunque } x & \text{se } a = 0. \\ x \geq -\frac{1}{a} & \text{se } a > 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\operatorname{dom} f = \begin{cases} \left(-\infty, -\frac{1}{a}\right] & \text{se } a < 0 \\ \mathbb{R} & \text{se } a = 0 \\ \left[-\frac{1}{a}, +\infty\right) & \text{se } a > 0. \end{cases}$$

b. $f(x) = \log_a(a^x - a)$

$\log_a$ e a^x sono definite se $a > 0$ e $a \neq 1$ ($\log_1$ non è definito). Quindi

$$a^x - a > 0 \iff a^x > a \iff \begin{cases} x < 1 & \text{se } a < 1, \\ x > 1 & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

Quindi

$$\operatorname{dom} f = \begin{cases} (-\infty, 1) & \text{se } 0 < a < 1, \\ (1, \infty) & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

c. $f(x) = \log(-x^2 + 2ax - 1)$

$-x^2 + 2ax - 1 > 0$: il discriminante è $4a^2 - 4$. I casi sono:

$a^2 < 1$, ovvero $-1 < a < 1$: nessuna x;

$a^2 = 1$, ancora nessuna x;

$a^2 > 1$, ovvero $a < -1 \vee a > 1$: $x \in (a - \sqrt{a^2-1}, a + \sqrt{a^2-1})$.

Quindi:

$$\operatorname{dom} f = \begin{cases} \emptyset & \text{se } -1 \geq a \geq 1; \\ (a - \sqrt{a^2-1}, a + \sqrt{a^2-1}) & \text{se } a < -1 \vee a > 1. \end{cases}$$

d. $f(x) = \dfrac{\sqrt{e^{-|x|} - a}}{x^2 + ax + a^2}$;

- $e^{-|x|} - a \geq 0 \iff e^{-|x|} \geq a \iff -|x| \geq \log a \iff \begin{cases} \text{per nessuna } x & \text{se } -\log a < 0 \iff a > 1 \\ x \in [\log a, -\log a] & \text{se } a \leq 1. \end{cases}$
- $x^2 + ax + a^2 \neq 0$ sempre perché $a^2 - 4a^2 = -3a^2 < 0$ per qualunque a.

Quindi:

$$\operatorname{dom} f = \begin{cases} \{0\} & \text{se } a = 1 \\ [\log a, -\log a] & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. Dimostrare per induzione le seguenti proposizioni:

a. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$ (la somma di niente, come quella da 0 a -1, è uguale a 0);

base

$$\sum_{k=0}^{-1} (2k+1) = 0 = 0^2.$$

passo L'ipotesi induttiva (ovvero la premessa dell'implicazione da dimostrare che supponiamo vera) è $\sum_{k=0}^{m-1} (2k+1) = m^2$. Elaboriamo:

$$\sum_{k=0}^{m+1-1} (2k+1) = 2m + 1 + \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1) \stackrel{\text{h.i.}}{=} 2m + 1 + m^2 = (m+1)^2.$$

L'uguaglianza con h.i. indica dove abbiamo utilizzato l'ipotesi induttiva.

b. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : \; 2^n \geq n^2$;

base

$$2^4 = 16 \geq 16 = 4^2.$$

passo

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m \stackrel{\text{h.i.}}{\geq} 2m^2 = m^2 + m \cdot m \geq m^2 + 4m \geq m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2.$$

c. (disuguaglianza di Bernoulli) $\forall n \in \mathbb{N} \, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1 : \; (1+x)^n \geq 1 + nx$.

base

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0 \cdot x.$$

passo

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)(1+x)^m;$$

Utilizzando l'ipotesi induttiva e il fatto che $x \geq -1$ (per cui $1 + x \geq 0$) abbiamo:

$$(1+x)^m \geq 1+mx \implies (1+x)(1+x)^m \geq (1+x)(1+mx) = 1+(m+1)x+mx^2 \geq 1+(m+1)x.$$