Università degli Studi "Roma Tre"
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Esercitazione 2 – 8 Ottobre

(a cura di Paolo Tranquilli)

Esercizio 1. Trovare per quali valori reali di x valgono le seguenti disuguaglianze.

a. $\left|\cos^2 x - \sin^2 x\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}$;

b. $\sin 2x - \sin x < 0$;

c. $\log_2(\sin x) - \log_2(\tan x) \geq -1$;

d. $1 + \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \geq \sqrt{x}$;

e. $1 + \sqrt{2\log^2 x + 5\log x - 7} > \log x$;

f. $\dfrac{x^x}{\sqrt{x}} < 1$.

Esercizio 2. Determinare al variare di a il dominio delle seguenti funzioni, specificando per quali valori di a tale dominio è definito e non vuoto.

a. $f(x) = \sqrt{ax+1}$;

b. $f(x) = \log_a(a^x - a)$;

c. $f(x) = \log(-x^2 + 2ax - 1)$;

d. $f(x) = \dfrac{\sqrt{e^{-|x|} - a}}{x^2 + ax + a^2}$;

Principio di induzione. Supponiamo di voler dimostrare una proposizione $\forall n \in \mathbb{N} : P[n]$ (riguardante quindi tutti i numeri naturali). Un modo molto comune è il *principio di induzione*, che consiste nel mostrare entrambe le seguenti proposizioni:

base $P[0]$, ovvero la stessa proposizione nel caso specifico di 0;

passo $\forall m \in \mathbb{N} : P[m] \Rightarrow P[m+1]$, ovvero dato un qualunque n supponendo P vera per n dedurne che vale anche per $n+1$.

Si può anche mostrare $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : P[n]$ (cioè solo da un certo n_0 in poi) dimostrando come base $P[n_0]$ e richiedendo anche nel passo $m \geq n_0$.

Esercizio 3. Dimostrare per induzione le seguenti proposizioni:

a. $\forall n \in \mathbb{N} : \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2$ (la somma di niente, come quella da 0 a -1, è uguale a 0);

b. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : 2^n \geq n^2$;

c. (disuguaglianza di Bernoulli) $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1 : (1+x)^n \geq 1 + nx$.