

Nickname:.....

Matricola: Sì  No

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI “ROMA TRE” - DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
**AM01 Test** - Roma, 1 ottobre 2007  
(a cura di Giampiero Palatucci)

NUMERI NATURALI E NUMERI RAZIONALI

**Definizione 1.** Dato un numero naturale  $n$ , indichiamo con  $n!$ , detto  $n$  fattoriale il numero

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

**Esercizio 1.** A partire da  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ,  $n!$  termina con almeno uno zero. Al crescere di  $n$  aumenta il numero degli zeri di  $n!$ . Con quanti zeri termina  $30!$ ?

Risposta.

**Esercizio 2.** Si ha  $20! = 243290200x176640000$ . Quanto vale  $x$ ?

Risposta.

**Esercizio 3.** Dimostrare che in  $\mathbb{Q}$  vale la “Legge di annullamento del prodotto”: *se  $ab = 0$ , allora almeno uno degli elementi  $a, b$  è nullo.*

**Dimostrazione.**

GRAFICI DI FUNZIONI

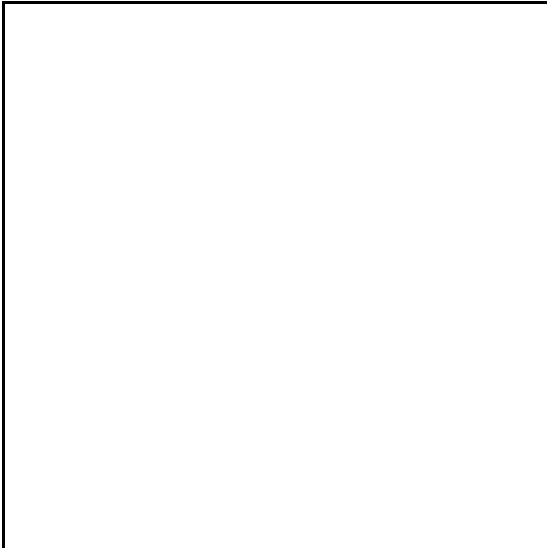
**Esercizio 4.** Disegnare i grafici delle seguenti funzioni

- a.  $f(x) = 1$ ,    b.  $f(x) = x$ ,    c.  $f(x) = 2x + 1$ ,    d.  $f(x) = 2x^2 + x + 1$ .

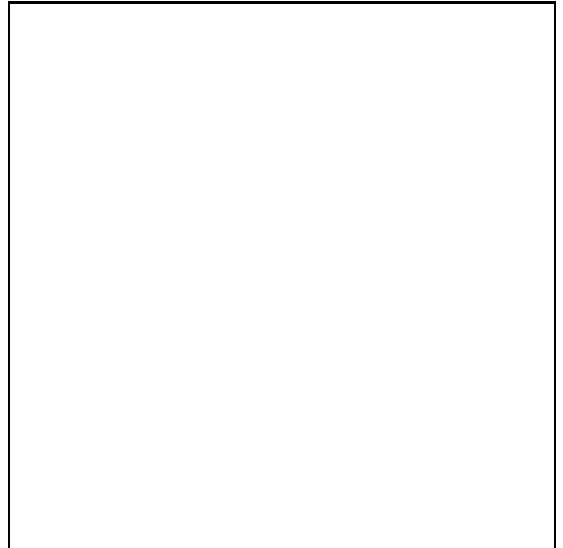
a.

b.

c.



d.



### FUNZIONI PARI, DISPARI E PERIODICHE

**Definizione 2.** Se il grafico di una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è simmetrico rispetto all'asse  $y$  si dice che la funzione è pari. Analiticamente, questa proprietà corrisponde a:  $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in I$ . Ad esempio  $f(x) = x^2$  è pari.

Se il grafico è simmetrico rispetto all'origine, la funzione è dispari:  $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in I$ . Ad esempio  $f(x) = x^3$  è dispari.

$f$  si dice periodica se esiste  $T > 0$  tale che  $f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in I$ . Ad esempio  $f(x) = \sin x$  è periodica di periodo  $T = 2\pi$ ; infatti:  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 5.** Dire quale delle seguenti funzioni è pari, dispari e/o periodica:

- |                         |                               |                                  |                                    |
|-------------------------|-------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| a. $f(x) =  x $         | pari <input type="checkbox"/> | dispari <input type="checkbox"/> | periodica <input type="checkbox"/> |
| b. $f(x) = \frac{1}{x}$ | pari <input type="checkbox"/> | dispari <input type="checkbox"/> | periodica <input type="checkbox"/> |
| c. $f(x) = \cos(x^2)$   | pari <input type="checkbox"/> | dispari <input type="checkbox"/> | periodica <input type="checkbox"/> |
| d. $f(x) =  \cos x $    | pari <input type="checkbox"/> | dispari <input type="checkbox"/> | periodica <input type="checkbox"/> |
| e. $f(x) = x x $        | pari <input type="checkbox"/> | dispari <input type="checkbox"/> | periodica <input type="checkbox"/> |

### FUNZIONI INVERTIBILI

**Definizione 3.** Siano  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y \in f(I)$ .  $f$  è iniettiva se manda valori di  $x$  diversi in valori  $y$  diversi, ossia

$$f \text{ è iniettiva se } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

**Esercizio 6.** Sia  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$  con  $x \in I = \{x \neq -2\}$ . Dimostrare che  $f$  è iniettiva.

**Dimostrazione.**



**Esercizio 7.**  $f(x) = x^2 + x$  non è una funzione iniettiva. Dimostrarlo.

**Dimostrazione.**

**Definizione 4.** Data una funzione  $f$  iniettiva, la funzione  $f^{-1} : f(I) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che gode della proprietà

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall y \in f(I), x \in I,$$

si dice funzione inversa di  $f$ . La funzione  $f$  si dice invertibile.

**Esercizio 8.** Sia  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$  con  $x \in I = \{x \neq -2\}$ . Trovare la funzione inversa di  $f$ .

**Svolgimento.**

FUNZIONI ELEMENTARI

**Esercizio 9.** Sia  $x$  un numero reale qualsiasi: quanto vale  $\sqrt{x^2}$ ?

**Risposta.**

**Esercizio 10.**  $-1 = (-1)^1 = (-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = [(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$ .

**Qual è l'errore?**

**Esercizio 11.** Trovare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

a.  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 3}$ ,   b.  $f(x) = \sqrt{1 + \log x}$ ,   c.  $f(x) = \left(\frac{x - 1}{x + 2}\right)^\pi$ ,   d.  $f(x) = x \log_{10}(x^2 - 3)$ .

a.  $\text{dom}(f) =$

b.  $\text{dom}(f) =$

c.  $\text{dom}(f) =$

d.  $\text{dom}(f) =$

DISEQUAZIONI

**Esercizio 12.** Trovare i numeri reali  $x$  che soddisfano alle seguenti disuguaglianze:

a.  $\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| > x - 1$ ,   b.  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} < \sqrt{x} + 1$ ,   c.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}$ .

a.

b.

c.