Nickname:.. Matricola: Sì ☐ No ☐

Università degli Studi di "Roma Tre" - Dipartimento di Matematica

AM01 Test - Roma, 1 ottobre 2007

(a cura di Giampiero Palatucci)

Numeri naturali e numeri razionali

Definizione 1. *Dato un numero naturale n, indichiamo con $n!$, detto* <u>*n fattoriale*</u> *il numero*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Esercizio 1. A partire da $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, $n!$ termina con almeno uno zero. Al crescere di n aumenta il numero degli zeri di $n!$. Con quanti zeri termina 30!?

Risposta. ☐

Esercizio 2. Si ha $20! = 243290200x176640000$. Quanto vale x?

Risposta. ☐

Esercizio 3. Dimostrare che in $\mathbb{Q}$ vale la "<u>Legge di annullamento del prodotto</u>": *se $ab = 0$, allora almeno uno degli elementi a, b è nullo.*

Dimostrazione.

Grafici di funzioni

Esercizio 4. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni

a. $f(x) = 1$, **b.** $f(x) = x$, **c.** $f(x) = 2x + 1$, **d.** $f(x) = 2x^2 + x + 1$.

a.

b.

c.

d.

Funzioni pari, dispari e periodiche

Definizione 2. *Se il grafico di una funzione* $f : I \to \mathbb{R}$ *è simmetrico rispetto all'asse* y *si dice che la funzione è pari. Analiticamente, questa proprietà corrisponde a:* $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in I$. *Ad esempio* $f(x) = x^2$ *è pari.*
Se il grafico è simmetrico rispetto all'origine, la funzione è dispari: $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in I$. *Ad esempio* $f(x) = x^3$ *è dispari.*
f *si dice periodica se esiste* $T > 0$ *tale che* $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in I$. *Ad esempio* $f(x) = \sin x$ *è periodica di periodo* $T = 2\pi$*; infatti:* $\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. Dire quale delle seguenti funzioni è pari, dispari e/o periodica:

a. $f(x) = \|x\|$	pari ☐	dispari ☐	periodica ☐
b. $f(x) = \dfrac{1}{x}$	pari ☐	dispari ☐	periodica ☐
c. $f(x) = \cos(x^2)$	pari ☐	dispari ☐	periodica ☐
d. $f(x) = \|\cos x\|$	pari ☐	dispari ☐	periodica ☐
e. $f(x) = x\|x\|$	pari ☐	dispari ☐	periodica ☐

Funzioni invertibili

Definizione 3. *Siano* $f : I \to \mathbb{R}$ *e* $y \in f(I)$. f *è iniettiva se manda valori di* x *diversi in valori* y *diversi, ossia*

$$f \text{ è iniettiva se } \quad f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$

Esercizio 6. Sia $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ con $x \in I = \{x \neq -2\}$. Dimostrare che f è iniettiva.

Dimostrazione.

Esercizio 7. $f(x) = x^2 + x$ non è una funzione iniettiva. Dimostrarlo.

Dimostrazione.

Definizione 4. *Data una funzione f iniettiva, la funzione $f^{-1} : f(I) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che gode della proprietà*

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall y \in f(I), x \in I,$$

si dice funzione inversa di f. La funzione f si dice invertibile.

Esercizio 8. Sia $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ con $x \in I = \{x \neq -2\}$. Trovare la funzione inversa di f.

Svolgimento.

Funzioni elementari

Esercizio 9. Sia x un numero reale qualsiasi: quanto vale $\sqrt{x^2}$?

Risposta.

Esercizio 10. $-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\cdot\frac{1}{2}} = [(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1.$

Qual è l'errore?

Esercizio 11. Trovare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-3}$, **b.** $f(x) = \sqrt{1+\log x}$, **c.** $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{\pi}$, **d.** $f(x) = x\log_{10}(x^2-3)$.

a. $\mathrm{dom}(f) =$ $\boxed{}$

b. $\mathrm{dom}(f) =$ $\boxed{}$

c. $\mathrm{dom}(f) =$ $\boxed{}$

d. $\mathrm{dom}(f) =$ $\boxed{}$

Disequazioni

Esercizio 12. Trovare i numeri reali x che soddisfano alle seguenti disuguaglianze:

$$\textbf{a. } \left|\frac{x-1}{x+1}\right| > x-1, \quad \textbf{b. } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} < \sqrt{x}+1, \quad \textbf{c. } \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}.$$

a. $\boxed{}$

b. $\boxed{}$

c. $\boxed{}$