

Nickname:.....

Matricola: Sì No

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI “ROMA TRE” - DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
AM01 Test - Roma, 1 ottobre 2007
(a cura di Giampiero Palatucci)

NUMERI NATURALI E NUMERI RAZIONALI

Definizione 1. Dato un numero naturale n , indichiamo con $n!$, detto n fattoriale il numero

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Esercizio 1. A partire da $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, $n!$ termina con almeno uno zero. Al crescere di n aumenta il numero degli zeri di $n!$. Con quanti zeri termina $30!$?

Risposta.

Esercizio 2. Si ha $20! = 243290200x176640000$. Quanto vale x ?

Risposta.

Esercizio 3. Dimostrare che in \mathbb{Q} vale la “Legge di annullamento del prodotto”: *se $ab = 0$, allora almeno uno degli elementi a, b è nullo.*

Dimostrazione.

GRAFICI DI FUNZIONI

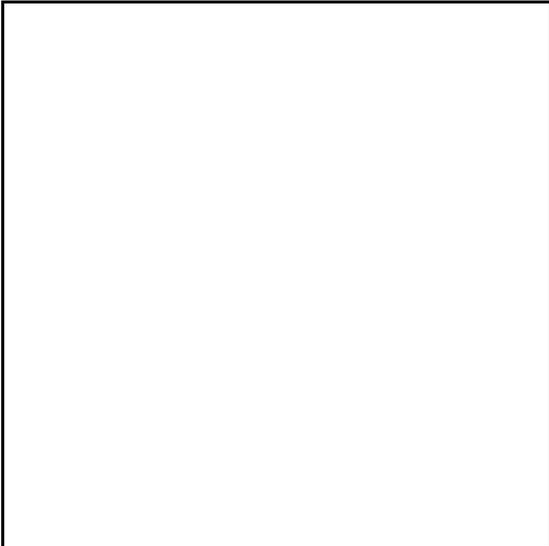
Esercizio 4. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni

a. $f(x) = 1$, b. $f(x) = x$, c. $f(x) = 2x + 1$, d. $f(x) = 2x^2 + x + 1$.

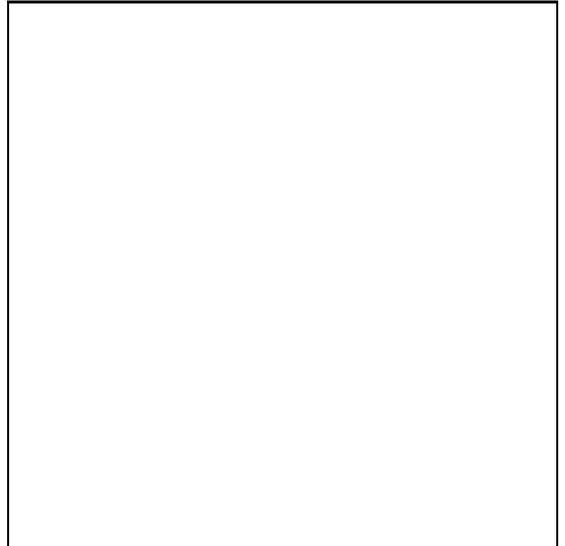
a.

b.

c.



d.



FUNZIONI PARI, DISPARI E PERIODICHE

Definizione 2. Se il grafico di una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è simmetrico rispetto all'asse y si dice che la funzione è pari. Analiticamente, questa proprietà corrisponde a: $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in I$. Ad esempio $f(x) = x^2$ è pari.

Se il grafico è simmetrico rispetto all'origine, la funzione è dispari: $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in I$. Ad esempio $f(x) = x^3$ è dispari.

f si dice periodica se esiste $T > 0$ tale che $f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in I$. Ad esempio $f(x) = \sin x$ è periodica di periodo $T = 2\pi$; infatti: $\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. Dire quale delle seguenti funzioni è pari, dispari e/o periodica:

- | | | | |
|-------------------------|-------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| a. $f(x) = x $ | pari <input type="checkbox"/> | dispari <input type="checkbox"/> | periodica <input type="checkbox"/> |
| b. $f(x) = \frac{1}{x}$ | pari <input type="checkbox"/> | dispari <input type="checkbox"/> | periodica <input type="checkbox"/> |
| c. $f(x) = \cos(x^2)$ | pari <input type="checkbox"/> | dispari <input type="checkbox"/> | periodica <input type="checkbox"/> |
| d. $f(x) = \cos x $ | pari <input type="checkbox"/> | dispari <input type="checkbox"/> | periodica <input type="checkbox"/> |
| e. $f(x) = x x $ | pari <input type="checkbox"/> | dispari <input type="checkbox"/> | periodica <input type="checkbox"/> |

FUNZIONI INVERTIBILI

Definizione 3. Siano $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $y \in f(I)$. f è iniettiva se manda valori di x diversi in valori y diversi, ossia

$$f \text{ è iniettiva se } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Esercizio 6. Sia $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ con $x \in I = \{x \neq -2\}$. Dimostrare che f è iniettiva.

Dimostrazione.



Esercizio 7. $f(x) = x^2 + x$ non è una funzione iniettiva. Dimostrarlo.

Dimostrazione.

Definizione 4. Data una funzione f iniettiva, la funzione $f^{-1} : f(I) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che gode della proprietà

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall y \in f(I), x \in I,$$

si dice funzione inversa di f . La funzione f si dice invertibile.

Esercizio 8. Sia $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ con $x \in I = \{x \neq -2\}$. Trovare la funzione inversa di f .

Svolgimento.

FUNZIONI ELEMENTARI

Esercizio 9. Sia x un numero reale qualsiasi: quanto vale $\sqrt{x^2}$?

Risposta.

Esercizio 10. $-1 = (-1)^1 = (-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = [(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$.

Qual è l'errore?

Esercizio 11. Trovare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 3}$, b. $f(x) = \sqrt{1 + \log x}$, c. $f(x) = \left(\frac{x - 1}{x + 2}\right)^\pi$, d. $f(x) = x \log_{10}(x^2 - 3)$.

a. $\text{dom}(f) =$

b. $\text{dom}(f) =$

c. $\text{dom}(f) =$

d. $\text{dom}(f) =$

DISEQUAZIONI

Esercizio 12. Trovare i numeri reali x che soddisfano alle seguenti disuguaglianze:

a. $\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| > x - 1$, b. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} < \sqrt{x} + 1$, c. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}$.

a.

b.

c.