Università degli Studi "Roma Tre"
Facoltà di Scienze Mat. Fis. e Nat. – C.d.L. in Matematica

AM1 Analisi 1 – a.a. 2007-2008
Limiti Notevoli

1. Per $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, e per $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \to +\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$, $\quad \lim_{x \to +\infty} (x^\alpha)^{\frac{1}{x}} = 1$.

2. Per $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $a > 1$ e $\beta > 0$: $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0$, $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$.

3. Se $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi, deg indica il grado di un polinomio e c il coefficiente di testa (ovvero il coefficiente del monomio di grado massimo):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \deg P > \deg Q \text{ e } c(P)c(Q) > 0 \text{ (segno concorde)}, \\ -\infty & \text{se } \deg P > \deg Q \text{ e } c(P)c(Q) < 0 \text{ (segno discorde)}, \\ \frac{c(P)}{c(Q)} & \text{se } \deg(P) = \deg(Q), \\ 0 & \text{se } \deg P < \deg Q. \end{cases}$$

4. $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

5. $\lim_{x \to 0} x \log x = 0$.

6. $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1$, $\quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

7. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Per le successioni i limiti dal punto 1 al punto 3 si possono applicare semplicemente sostituendo n a x.

I limiti dal punto 4 al punto 7 si possono applicare alle successioni sostituendo $\frac{1}{n}$ o $-\frac{1}{n}$ a x, ovvero:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^{\pm n} = e, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{n} = 0,$$

$$\lim_{n \to +\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \qquad \lim_{n \to +\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1, \qquad \lim_{n \to +\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1.$$

In generale se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e s_n è una successione con $\lim_{n \to +\infty} s_n = a$, allora $\lim_{n \to +\infty} f(s_n) = b$ (il contrario non vale). Ad esempio

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e,$$

perché $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$.