# Logica

## 1.5: Teoria Assomatica degli Insiemi (cenni)

Claudio Sacerdoti Coen

<sacerdot@cs.unibo.it>

Universitá di Bologna

02/10/2017

# Teorie assiomatiche degli insiemi: perchè?

## Paradosso di Russell

Sia $X = \{Y \mid Y \notin Y\}$

$X \in X$ sse $X \notin X$

- Il paradosso mostra che la teoria naif degli insiemi porta a inconsistenza logica
- La teoria naif usa l'assioma di comprensione: per ogni proprietà $P$ si può formare $\{x \mid P(x)\}$
- Serve una teoria che rimuova l'assioma di comprensione
- Serva una teoria che controlli l'uso meta-linguistico
  - $X$ non deve essere un insieme ma una classe perchè "troppo grande"
  - certe collezioni di insiemi devono essere insiemi

# Teorie assiomatiche degli insiemi: preliminari

In una teoria assiomatica degli insiemi:

1. I concetti di insieme, appartenenza e uguaglianza non vengono definiti (gli insiemi sono enti primitivi: definire un insieme come una collezione, definita come un gruppo, etc. non serve a nulla)
2. Usiamo assiomi per asserire l'esistenza di alcuni insiemi a partire da altri
3. Ci sono numerose teorie insiemistiche che differiscono riguardo agli assiomi
4. Noi seguiremo la teoria di Zermelo-Fraenkel (ZF) che è la meno controversa ed è già sufficiente per sviluppare la maggior parte della matematica
5. ZF non è mai stata dimostrata essere consistente

### Assioma di estensionalità

Due insiemi sono uguali sse hanno gli stessi elementi.

$$\forall X, \forall Y, (X = Y \iff \forall Z.(Z \in X \iff Z \in Y))$$

### Definizione di essere sottoinsieme

$X$ è sottoinsieme di $Y$ se $Y$ possiede tutti gli elementi di $X$

$$X \subseteq Y \stackrel{\text{def}}{=\!=} \forall Z, (Z \in X \Rightarrow Z \in Y)$$

**Assioma di separazione**

Dato un insieme, possiamo formare il sottoinsieme dei suoi elementi che soddisfano una proprietà

$$\forall X, \exists Y, \forall Z, (Z \in Y \iff Z \in X \wedge P(Z))$$

Indichiamo tale $Y$ come $\{Z \in X \mid P(Z)\}$

Per usare l'assioma di separazione per riprodurre il paradosso di Russell servirebbe un insieme $U$ che contenesse tutti gli altri insiemi:

$$X = \{Y \in U \mid Y \notin Y\}$$

Nessun assioma asserirà che $U$ esista: la collezione di tutti gli insiemi è una classe propria (cioè una classe che NON è un insieme).

## Assioma dell'insieme vuoto

$$\exists X, \forall Z, Z \notin X$$

L'insieme $X$ viene indicato come $\emptyset$

## Definizione dell'insieme vuoto

L'assioma è ridondante. Sia $Y$ un qualunque altro insieme di cui un assoma asserisce l'esistenza (vedi p.e. assioma dell'infinito).

$$\emptyset \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{X \in Y \mid \mathit{false}\}$$

## Definizione di intersezione binaria

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=\!=} \{X \in A \mid X \in B\}$$

## Teorema

$$X \in A \cap B \iff X \in A \land X \in B$$

## Definizione di intersezione

$$\bigcap F \overset{\text{def}}{=\!=} \emptyset \text{ se } F = \emptyset$$

$$\bigcap F \overset{\text{def}}{=\!=} \{X \in A \mid \forall Y, (Y \in F \Rightarrow X \in Y)\} \text{ dove } A \in F$$

La definizione non dipende dall'$A$ scelto. $\bigcap F$ si indica anche come $\bigcap_{Y \in F} Y$.

### Assioma dell'unione

Dato un insieme di insiemi, esiste l'insieme che ne è l'unione.

$$\forall F, \exists X, \forall Z, (Z \in X \iff \exists Y, (Y \in F \wedge Z \in Y))$$

L'insieme $Y$ viene indicato con $\bigcup F$ o $\bigcup_{Y \in F} Y$.

### Teorema dell'unione binaria

$$\forall A, \forall B, \exists X, \forall Z, (Z \in X \iff Z \in A \vee Z \in B)$$

Si dimostra una volta che si è dimostrata per ogni $A$ e $B$ l'esistenza di un insieme che contiene solo $A$ e $B$.

### Assioma del singoletto

$$\forall X, \exists Y, \forall Z, (Z \in Y \iff Z = X)$$

L'insieme $Y$ viene indicato come $\{X\}$

### Teorema del singoletto

Anche l'assioma precedente è ridondante: può essere dimostrato a partire dall'assioma di rimpiazzamento (introdotto dopo).

## Costruzione dei numeri naturali

$$\llbracket 0 \rrbracket \stackrel{\text{def}}{=\!=} \emptyset$$
$$\llbracket n+1 \rrbracket \stackrel{\text{def}}{=\!=} \llbracket n \rrbracket \cup \{\llbracket n \rrbracket\}$$

## Esempi:

$$\begin{aligned}
\llbracket 0 \rrbracket &= \emptyset \\
\llbracket 1 \rrbracket &= \{\emptyset\} \\
\llbracket 2 \rrbracket &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
\llbracket 3 \rrbracket &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}
\end{aligned}$$

## Tutti i numeri sono diversi

Esempio: supponiamo per assurdo $1 = 2$.
Quindi $\forall Z, (Z \in 1 \iff Z \in 2)$ per l'assioma di estensionalità.
Poichè $1 \in 2$ per l'assioma dell'unione e quello del singoletto, ne deduciamo $1 \in 1 = \{\emptyset\}$.
Quindi $\{\emptyset\} = 1 = \emptyset$.
Quindi $\forall Z, (Z \in \{\emptyset\} \iff Z \in \emptyset)$.
Quindi poichè $\emptyset \in \{\emptyset\}$ per l'assioma del singoletto, ne deduciamo $\emptyset \in \emptyset$.
Il che è assurdo per l'assioma/teorema del vuoto.
Dall'assurdo concludiamo $1 \neq 2$.

### Assioma dell'infinito

Esiste un insieme che contiene almeno tutti (gli encoding de)i numeri naturali.

$$\exists Y, (\emptyset \in Y \land \forall N, (N \in Y \Rightarrow N \cup \{N\} \in Y))$$

Indichiamo temporaneamente con $\mathcal{N}$ tale insieme.

### Teorema: esistenza di $\mathbb{N}$

Combinando altri assioma con quello dell'infinito si arriva a dimostrare l'esistenza dell'insieme $\mathbb{N}$ che contiene tutti e soli (gli encoding de)i numeri naturali.

### Assioma dell'insieme potenza

Esiste l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme dato.

$$\forall X, \exists Y, \forall Z, (Z \in Y \iff Z \subseteq X)$$

Indichiamo $Y$ come $2^X$ o $\mathcal{P}(X)$ (insieme potenza o insieme delle parti).

## Assioma di regolarità (o di fondazione)

Ogni insieme non vuoto ha un elemento dal quale è disgiunto.
Fra le conseguenze: nessun insieme contiene (ricorsivamente) se stesso e ha quindi senso cercare di misurare la taglia (chiamata cardinalità) di un insieme.

**Assioma di rimpiazzamento**

Intuitivamente: l'immagine di un insieme rispetto a una formula che descrive una funzione è ancora un insieme.
Intuitivamente: se $A$ è un insieme, quindi è abbastanza piccolo, e a ogni elemento ne associo un altro, in una relazione molti-a-uno, quello che ottengo come immagine è ancora piccolo.