

Logica

7: Conseguenza ed equivalenza logica in logica classica proposizionale

Claudio Sacerdoti Coen

`<sacerdot@cs.unibo.it>`

Università di Bologna

15/11/2017

Outline

- 1 Conseguenza ed equivalenza logica in logica classica proposizionale

Conseguenza logica per la logica proposizionale

Wikipedia: “*Logical consequence* is the relation that holds between a set of sentences (or propositions) and a sentence (proposition) when the former “entails” the latter.

Lezione precedente:

F è *conseguenza logica* di Γ ($\Gamma \Vdash F$) quando, al variare dell'interpretazione delle formule nei vari mondi possibili, è sempre vero che: se tutte le formule in Γ sono vere (nel mondo sotto esame), anche F è necessariamente vera.

Definizione: $\Gamma \Vdash F$ (conseguenza logica) quando per ogni mondo v si ha che, se $\llbracket G \rrbracket^v = 1$ per ogni $G \in \Gamma$, allora $\llbracket F \rrbracket^v = 1$

Definizione: $F \equiv G$ (equivalenza logica) quando $F \Vdash G$ e $G \Vdash F$

Caratterizzazione alternativa: $F \equiv G$ quando per ogni mondo v , $\llbracket F \rrbracket^v = \llbracket G \rrbracket^v$.

Tautologie

Definizione: F è tautologica (o è una tautologia) quando $\Vdash F$ (F è conseguenza logica dell'insieme vuoto di formule)

Teorema (o definizione alternativa):

$\Vdash F$ sse in ogni mondo v si ha $\llbracket F \rrbracket^v = 1$.

F è una tautologia quando rappresenta una verità assoluta (indipendente dal mondo in esame)

F è una tautologia se la sua tabella di verità presenta solo degli 1. Esempio: $A \Rightarrow A$

$v(A)$	$\llbracket A \Rightarrow A \rrbracket^v$
0	1
1	1

Soddisfacibilità e insoddisfacibilità

Nota: affinché $\not\models F$ (F non è una tautologia) è sufficiente **un solo** mondo v tale per cui $v(F) = 0$.

Definizione:

F è **soddisfatta** in un mondo v ($v \models F$) sse $v(F) = 1$

Definizione:

F è **soddisfacibile** quando **esiste** un mondo v tale che $v \models F$.

Teorema:

F è **tautologica** quando **per ogni** mondo v si ha $v \models F$.

Definizione:

F è **insoddisfacibile** quando **in nessun** mondo v si ha $v \models F$.

Soddisfacibilità e insoddisfacibilità

Nota: F è insoddisfacibile quando rappresenta una falsità assoluta (indipendente dal mondo in esame)

A livello di tabelle di verità per F :

- 1 F è **tautologica** se la tabella ha **soli uno** (es. $A \Rightarrow A$)
- 2 F è **insoddisfacibile** se la tabella ha **soli zero** (es. $A \wedge \neg A$)
- 3 F è **soddisfacibile** se la tabella ha **almeno un uno** (es. $\neg A$)
- 4 F è **non tautologica** se la tabella ha **almeno uno zero** (es. $\neg A$)

Una formula F può essere classificata come segue:

- 1 una **tautologia** (e in tal caso è anche soddisfacibile)
(soli uno nella tabella)
- 2 **soddisfacibile ma non tautologica**
(sia uno che zero)
- 3 **insoddisfacibile**
(soli zero nella tabella)

Equivalenza logica e tabelle di verità

F e G sono logicamente equivalenti $F \equiv G$ quando le loro tabelle di verità sono identiche

Esempio: $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

$v(A)$	$v(B)$	$[[A \Rightarrow B]]^v$	$[[\neg A \vee B]]^v$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Conseguenza logica e tabelle di verità

Anche $\Gamma \Vdash F$ è rappresentabile con tabelle di verità:

- 1 Sia $n = |\text{Var}(F) \cup \bigcup_{G \in \Gamma} \text{Var}(G)|$.
Si costruisce una tabella di verità con 2^n righe (mondi possibili).
- 2 $\Gamma \Vdash F$ quando F vale 1 in tutte le righe nelle quali tutte le formule in Γ valgono 1
- 3 In altre parole:
 - 1 si considerano solamente le righe in cui tutte le formule di Γ valgono 1
 - 2 $\Gamma \Vdash F$ se F è una tautologia ristretta a tali righe

Nota: quando Γ è vuoto ci si riduce a considerare tutte le righe

Conseguenza logica e tabelle di verità

Esempio: $A, A \Rightarrow B \Vdash A \vee B$

$v(A)$	$v(B)$	$\llbracket A \rrbracket^v$	$\llbracket A \Rightarrow B \rrbracket^v$	$\llbracket A \vee B \rrbracket^v$
0	0	0		
0	1	0		
1	0	1	0	
1	1	1	1	1

Teorema di invarianza per sostituzione

$F \equiv G$ quando in ogni mondo F e G hanno sempre la stessa denotazione

ovvero $F \equiv G$ quando sono due connotazioni diverse per la stessa denotazione

Siamo quasi pronti per enunciare formalmente il teorema di invarianza per sostituzione. Dalle lezioni precedenti:

Siano x e y due connotazioni per la stessa denotazione. Il principio di invarianza per sostituzione vale se per ogni contesto $P[\cdot]$ le due connotazioni $P[x]$ e $P[y]$ denotano la stessa cosa.

Ci resta da definire la nozione di sostituzione di una formula in un contesto.

Sostituzione

Un contesto è una formula che contiene uno o più buchi.

In logica proposizionale possiamo pensare a un buco come a una variabile proposizionale (diciamo la A).

Riempire un buco significa rimpiazzare la variabile con una formula.

Definizione (per ricorsione strutturale su F) di sostituzione una formula G al posto di A in F (scritto $F[G/A]$):

$$\begin{array}{lll}
 \perp[G/A] = \perp & (\neg F)[G/A] & = \neg F[G/A] \\
 \top[G/A] = \top & (F_1 \wedge F_2)[G/A] & = F_1[G/A] \wedge F_2[G/A] \\
 A[G/A] = G & (F_1 \vee F_2)[G/A] & = F_1[G/A] \vee F_2[G/A] \\
 B[G/A] = B & (F_1 \Rightarrow F_2)[G/A] & = F_1[G/A] \Rightarrow F_2[G/A]
 \end{array}$$

Teorema di invarianza per sostituzione

Teorema di invarianza per sostituzione: per tutte le formule F, G_1, G_2 e per ogni A , se $G_1 \equiv G_2$ allora $F[G_1/A] \equiv F[G_2/A]$

Dimostrazione: per induzione strutturale su F .

Caso \perp : $\perp[G_1/A] = \perp \equiv \perp = \perp[G_2/A]$

Caso \top : $\top[G_1/A] = \top \equiv \top = \top[G_2/A]$

Caso A : $A[G_1/A] = G_1 \equiv G_2 = A[G_2/A]$

Caso B : $B[G_1/A] = B \equiv B = B[G_2/A]$

Teorema di invarianza per sostituzione

Caso $F_1 \wedge F_2$:

Per ipotesi induttiva sappiamo

$$F_1[G_1/A] \equiv F_1[G_2/A] \quad \text{e} \quad F_2[G_1/A] \equiv F_2[G_2/A]$$

ovvero che per ogni mondo v si ha

$$\llbracket F_1[G_1/A] \rrbracket^v = \llbracket F_1[G_2/A] \rrbracket^v \quad \text{e} \quad \llbracket F_2[G_1/A] \rrbracket^v = \llbracket F_2[G_2/A] \rrbracket^v$$

Dobbiamo dimostrare

$$(F_1 \wedge F_2)[G_1/A] \equiv (F_1 \wedge F_2)[G_2/A]$$

o, equivalentemente, che per ogni v si ha

$$\llbracket (F_1 \wedge F_2)[G_1/A] \rrbracket^v = \llbracket (F_1 \wedge F_2)[G_2/A] \rrbracket^v$$

Teorema di invarianza per sostituzione

Sia v un mondo generico ma fissato.

Le ipotesi induttive specializzate a v dicono

$$\llbracket F_1[G_1/A] \rrbracket^v = \llbracket F_1[G_2/A] \rrbracket^v \quad \text{e} \quad \llbracket F_2[G_1/A] \rrbracket^v = \llbracket F_2[G_2/A] \rrbracket^v$$

Si ha

$$\begin{aligned} & \llbracket (F_1 \wedge F_2)[G_1/A] \rrbracket^v \\ &= \llbracket F_1[G_1/A] \wedge F_2[G_1/A] \rrbracket^v \\ &= \min\{\llbracket F_1[G_1/A] \rrbracket^v, \llbracket F_2[G_1/A] \rrbracket^v\} \\ &= \min\{\llbracket F_1[G_2/A] \rrbracket^v, \llbracket F_2[G_2/A] \rrbracket^v\} \\ &= \llbracket F_1[G_2/A] \wedge F_2[G_2/A] \rrbracket^v \\ &= \llbracket (F_1 \wedge F_2)[G_2/A] \rrbracket^v \end{aligned}$$

Qed (caso \wedge)

I casi \vee e \Rightarrow sono analoghi.

Conclusioni

Per la logica proposizionale abbiamo:

- 1 dato formalmente una sintassi
- 2 data formalmente la semantica classica
- 3 definite formalmente le nozioni di conseguenza logica, equivalenza logica, soddisfacibilità, tautologicità
- 4 dimostrato il principio di invarianza per sostituzione

Nelle prossime lezioni studieremo in dettaglio la semantica dei nostri connettivi e le proprietà della conseguenza logica.