

Logica

6: Semantica classica della logica proposizionale

Claudio Sacerdoti Coen

`<sacerdot@cs.unibo.it>`

Università di Bologna

13-15/11/2017

Outline

- 1 Semantica classica della logica proposizionale

Semantica

Wikipedia: “La **semantica** é quella parte della linguistica che studia il significato delle parole (semantica lessicale), degli insiemi delle parole, delle frasi (semantica frasale) e dei testi. Sintassi = descrizione dell’insieme di tutte le connotazioni alle quali associamo una denotazione (semantica)

Semantica = ciò che viene associato alle connotazioni in un particolare **dominio di interpretazione**; insieme delle denotazioni

(Funzione) semantica (o interpretazione) = funzione che associa a ogni connotazione una denotazione in un dominio di interpretazione fissato

Semantica

Esempi:

semantica di un linguaggio di programmazione

semantica di una logica

semantica della lingua italiana

- È la semantica che determina il significato di un linguaggio
- Possiamo dare semantiche totalmente diverse allo stesso linguaggio
- In genere vi è una semantica “naturale” o “principale”, detta **semantica intesa**
- Semantiche alternative tanto più interessanti quanto distinte da quella intesa (e.s. interpreto $f(x)$ con il tempo necessario ad eseguire f sull'input x e un ciclo `while` con una sommatoria)
- Semantiche (della verità) in funzione dei mondi (o interpretazioni)

La semantica classica della logica proposizionale

$$F ::= \perp \mid \top \mid A \mid B \mid \dots \mid \neg F \mid F \wedge F \mid F \vee F \mid F \Rightarrow F$$

- Semantica classica: associa a ogni denotazione il suo **valore di verità** in un qualche mondo (p.e. il falso a \perp)
- Il mondo determina il valore di verità delle variabili proposizionali A, B, \dots (p.e. A è vero nel mondo x , falso nel mondo y)
- La semantica dei connettivi è invece fissata
- Quando si assume la semantica classica, la logica si dice **logica proposizionale classica**

I mondi della logica classica

Logica classica: assunzioni sul mondo

Visione “Platonica”: in ogni mondo (**preso singolarmente**)

- Ogni enunciato è vero o falso
- Un enunciato non può essere vero e falso allo stesso tempo (non contraddizione)
- **Il valore di verità non muta (staticità)**
- **Il valore di verità di un enunciato è sempre determinato (determinatezza)**
- Staticità e determinatezza segnano un solco fra verità (classica) e conoscenza (non statica, ma monotona; possibilmente indeterminata)
- Staticità segna un solco fra verità e risorse (che si consumano)

Vedremo altre semantiche corrispondenti ad altre logiche.

Interpretazione classica

Useremo i naturali 0 e 1 per le denotazioni classiche di falsità e verità.

La scelta di usare naturali è di comodo (permette manipolazioni aritmetiche). Esempio di alternativa: i booleani.

Definizione: una (funzione di) interpretazione (classica) o mondo è una funzione dall'insieme delle variabili proposizionali $\{A, B, \dots\}$ verso $\{0, 1\}$

Indicheremo le interpretazioni con v, v', v_1, v_2, \dots

Esempio: se $v(A) = 1$ e $v'(A) = 0$ allora A denota il vero nel mondo v e il falso nel mondo v' .

Semantica della logica classica proposizionale

Definizione: data un'interpretazione (o mondo) v , la semantica $\llbracket \cdot \rrbracket^v : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$, è definita per induzione strutturale sulle connotazioni come segue:

$$\begin{aligned}
 \llbracket \perp \rrbracket^v &= 0 \\
 \llbracket \top \rrbracket^v &= 1 \\
 \llbracket A \rrbracket^v &= v(A) \\
 \llbracket \neg F \rrbracket^v &= 1 - \llbracket F \rrbracket^v \\
 \llbracket F_1 \wedge F_2 \rrbracket^v &= \min\{\llbracket F_1 \rrbracket^v, \llbracket F_2 \rrbracket^v\} \\
 \llbracket F_1 \vee F_2 \rrbracket^v &= \max\{\llbracket F_1 \rrbracket^v, \llbracket F_2 \rrbracket^v\} \\
 \llbracket F_1 \Rightarrow F_2 \rrbracket^v &= \max\{1 - \llbracket F_1 \rrbracket^v, \llbracket F_2 \rrbracket^v\}
 \end{aligned}$$

Nota: nel libro $\llbracket F \rrbracket^v$ viene indicata con $v(F)$ facendo (volutamente) confusione fra la v come interpretazione e la v come semantica. Si dice che la v come semantica estende l'interpretazione v dal dominio delle variabili a quello delle formule.

Semantica della logica classica proposizionale

Esercizi: dimostrare

- $\llbracket A \vee \top \Rightarrow B \wedge \top \rrbracket^v = \llbracket B \rrbracket^v$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \llbracket A \vee \top \Rightarrow B \wedge \top \rrbracket^v &= \max\{1 - \llbracket A \vee \top \rrbracket^v, \llbracket B \wedge \top \rrbracket^v\} = \\ &= \max\{1 - \max\{\llbracket A \rrbracket^v, \llbracket \top \rrbracket^v\}, \min\{\llbracket B \rrbracket^v, \llbracket \top \rrbracket^v\}\} = \\ &= \max\{1 - \max\{v(A), 1\}, \min\{v(B), 1\}\} = \\ &= \max\{1 - 1, v(B)\} = v(B) = \llbracket B \rrbracket^v \end{aligned}$$

- $\llbracket A \Rightarrow \neg A \Rightarrow B \rrbracket^v = 1$

- $\llbracket (B \Rightarrow B) \Rightarrow A \wedge \neg A \rrbracket^v = 0$

Tabelle di verità

Poichè $\llbracket \cdot \rrbracket^v$ è definita per ricorsione strutturale e poichè i connettivi hanno un numero finito n ($= 0, 1, 2$) di argomenti e questi possono denotare solamente due valori, è possibile rappresentarne la semantica con una tabella di verità con 2^n righe (possibili semantiche delle sottoformule immediate) e valori in $\{0, 1\}$ (semantica dell'intera formula).

$\llbracket \perp \rrbracket^v$
0

$\llbracket \top \rrbracket^v$
1

$\llbracket F \rrbracket^v$	$\llbracket \neg F \rrbracket^v$
0	1
1	0

$\llbracket F_1 \rrbracket^v$	$\llbracket F_2 \rrbracket^v$	$\llbracket F_1 \wedge F_2 \rrbracket^v$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\llbracket F_1 \rrbracket^v$	$\llbracket F_2 \rrbracket^v$	$\llbracket F_1 \vee F_2 \rrbracket^v$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implicazione materiale

Il connettivo di implicazione materiale (“se ... allora”) ha la seguente tabella che **non** cattura l’usuale nozione di causalità:

$\llbracket F_1 \rrbracket^v$	$\llbracket F_2 \rrbracket^v$	$\llbracket F_1 \Rightarrow F_2 \rrbracket^v$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Esempi (nel mondo inteso usuale v):

$\llbracket \text{se } 2+2=5 \text{ allora gli asini volano} \rrbracket^v = 1$
 basta che l’antecedente ($2+2=5$) sia falso

$\llbracket \text{se i politici sono onesti allora Berlusconi è stato condannato in cassazione} \rrbracket^v = 1$
 basta che il susseguente (Berlusconi ...) sia vero

Semantica Tarskiana

Con semplici manipolazione algebriche si vede che:

$\llbracket \perp \rrbracket^v$ è **falsa** (= 0)

$\llbracket \top \rrbracket^v$ è **vera** (= 1)

$\llbracket A \rrbracket^v = v(A)$

$\llbracket \neg F \rrbracket^v$ è vera sse $\llbracket F \rrbracket^v$ **non** è vera

$\llbracket F_1 \wedge F_2 \rrbracket^v$ è vera sse $\llbracket F_1 \rrbracket^v$ è vera **e** $\llbracket F_2 \rrbracket^v$ è vera

$\llbracket F_1 \vee F_2 \rrbracket^v$ è vera sse $\llbracket F_1 \rrbracket^v$ è vera **o** $\llbracket F_2 \rrbracket^v$ è vera

$\llbracket F_1 \Rightarrow F_2 \rrbracket^v$ è vera sse **se** $\llbracket F_1 \rrbracket^v$ è vera **allora** $\llbracket F_2 \rrbracket^v$ è vera

Questa semantica (detta alla Tarski):

- usa i connettivi della meta-logica per spiegare quelli della logica.
- non è molto informativa
- è (troppo) dipendente dalla semantica della meta-logica

Tabelle di verità

È possibile estendere le tabelle di verità dai connettivi a formule generiche?

Sì, ma la dimostrazione non è immediata (vedi prossimi lucidi)

e tale costruzione non scala alla logica del prim'ordine (che comprende i quantificatori universale \forall ed esistenziale \exists)

Variabili

Definizione: la funzione $Var(F)$ (variabili di F , variabili che occorrono in F) è definita per ricorsione strutturale su F come segue:

$$\begin{aligned}
 Var(\perp) &= \emptyset \\
 Var(\top) &= \emptyset \\
 Var(A) &= \{A\} \\
 Var(\neg F) &= Var(F) \\
 Var(F_1 \wedge F_2) &= Var(F_1) \cup Var(F_2) \\
 Var(F_1 \vee F_2) &= Var(F_1) \cup Var(F_2) \\
 Var(F_1 \Rightarrow F_2) &= Var(F_1) \cup Var(F_2)
 \end{aligned}$$

Teorema: $Var(F)$ è sempre un insieme finito qualunque sia F .

Dimostrazione: per induzione strutturale su F .

Casi \perp , \top e A : l'insieme vuoto e i singoletti sono finiti.

Caso $F_1 \wedge F_2$: per ipotesi induttiva $Var(F_1)$ e $Var(F_2)$ sono insiemi finiti e l'unione di insiemi finiti è finita.

Semantica classica

Teorema: $\llbracket F \rrbracket^v$ usa solamente la restrizione di v al dominio $Var(F)$

Corollario: se v_1 e v_2 sono tali che per ogni $X \in Var(F)$ si ha $v_1(X) = v_2(X)$, allora $\llbracket F \rrbracket^{v_1} = \llbracket F \rrbracket^{v_2}$.

Dimostrazione del teorema: per induzione strutturale su F .

Casi \perp , \top : non usano v .

Caso A : $\llbracket A \rrbracket^v = v(A)$ e $Var(A) = \{A\}$.

Caso $\neg F$:

Per ipotesi induttiva $\llbracket F \rrbracket^v$ usa solo la restrizione a $Var(F)$.

Si ha $\llbracket \neg F \rrbracket^v = 1 - \llbracket F \rrbracket^v$ e $Var(\neg F) = Var(F)$.

Caso $F_1 \wedge F_2$ (i casi $F_1 \vee F_2$ e $F_1 \Rightarrow F_2$ sono simili):

Per ipotesi induttiva $\llbracket F_1 \rrbracket^v$ usa solo la restrizione a $Var(F_1)$ e $\llbracket F_2 \rrbracket^v$ usa solo la restrizione a $Var(F_2)$

Si ha $\llbracket F_1 \wedge F_2 \rrbracket^v = \min\{\llbracket F_1 \rrbracket^v, \llbracket F_2 \rrbracket^v\}$

che usa v sulla restrizione al dominio di F_1 e a quello di F_2 e $Var(F_1 \wedge F_2) = Var(F_1) \cup Var(F_2)$.

Tabelle di verità

In virtù dei precedenti teoremi è possibile rappresentare $\llbracket F \rrbracket^v$ al variare del mondo v con una tabella di verità di 2^n righe dove $n = |\text{Var}(F)|$. Ogni riga rappresenta un insieme di mondi che concordano su un numero finito di variabili e il numero di tali insiemi è finito.

$v(A)$	$v(B)$	$\llbracket A \vee B \rrbracket^v$	$\llbracket B \vee \perp \rrbracket^v$	$\llbracket A \vee B \Rightarrow B \vee \perp \rrbracket^v$
0	0	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Conclusioni

- Logica classica = logica data su mondi statici e totalmente determinati
- Interpretazione (o mondo): assegna un valore di verità a ogni variabile che occorre in una formula
- Le variabili che occorrono in una formula sono in numero finito
- Semantica: estende le interpretazioni fissando la denotazione dei connettivi indipendentemente dai mondi
- Tabelle di verità: usate per rappresentare visivamente le denotazioni di una formula al variare dei mondi