

Logica

2: Verità e conseguenza logica

Claudio Sacerdoti Coen

`<sacerdot@cs.unibo.it>`

Università di Bologna

08/11/2017

Outline

1 Verità e conseguenza logica

Verità

Wikipedia: “Col termine **verità** si indicano una varietà di significati, che esprimono un senso di accordo con la **realtà**, e sono in genere collegati col concetto di onestà, buona fede e sincerità.

Verità fisiche, chimiche, . . . associate al **mondo sensibile**.

Un esperimento **ripetibile** definisce una verità.

Verità **parametrica** rispetto a **cambiamenti del mondo sensibile**.

Verità assolute associate ad aspetti immodificabili.

*Cosa resta della verità quando manca il mondo sensibile?
(matematica, informatica)*

Verità vs ragionamento ipotetico

Supponete di stare leggendo un libro di fantascienza

- leggendo il libro scoprite le leggi fisiche che **si suppone** valgano
- in base a quelle siete in grado di affermare che **in tale mondo** certi eventi accadano (siano vere) e altre no
- le leggi fisiche descritte individuano **una molteplicità di mondi fantastici**: non descrivono interamente l'intero funzionamento del mondo
- pertanto ci saranno eventi dei quali non saprete dire se accadano o no
- una descrizione completa del mondo dovrebbe dirci per ogni evento se esso accade o meno

Verità in matematica

Una **teoria matematica** è come un libro di fantascienza

- gli **assiomi** sono come le leggi fisiche: ci dicono tutto quello che **supponiamo** valere **nei mondi** sotto considerazione
- un **modello matematico** della teoria è **un qualunque mondo** in cui interpretare i concetti matematici primitivi in modo tale che ogni assioma della teoria valga
- un **mondo** è una descrizione completa che determina un concetto di verità; gli assiomi tuttavia individuano **una molteplicità di mondi** (tutti i modelli della teoria)
- data una **proposizione**, essa potrebbe essere sicuramente vera in ogni modello di una teoria, sicuramente falsa o non determinata (a volte vera, a volte falsa)

Teorie, modelli, verità: esempi

Esempio di teoria:

- Enti primitivi: $0, \leq$
- Assomi: \leq ha le proprietà riflessiva, antisimmetrica, transitiva e $\forall n, 0 \leq n$

Esempio di proposizioni:

- 1 $\forall x. x \leq 0 \Rightarrow x = 0$
- 2 $\forall x, y. x \leq y \vee y \leq x$

Modello 1:

- interpreto gli oggetti come numeri naturali
- 0 come numero 0
- \leq come \leq sui naturali
- tutti gli assiomi sono soddisfatti
- entrambe le proposizioni sono vere

Modello 2:

- interpreto gli oggetti come numeri naturali
- 0 come numero 1
- \leq come "divide"
- tutti gli assiomi sono soddisfatti
- solo la prima proposizione è vera

È possibile trovare un modello della teoria in cui la prima proposizione sia falsa?

Dalla verità alla conseguenza logica

Data una teoria e una proposizione

- **Non ha senso chiedersi se la proposizione sia vera o falsa** non sappiamo in quale mondo valutarla; non abbiamo un mondo (sensibile o meno) di riferimento
- **Ha senso chiedersi se sia vera in ogni modello della teoria**
 - gli assiomi della teoria sono **filtri** sulla totalità dei mondi;
 - restringendo l'insieme dei mondi sotto esame certe proposizioni assumono lo stesso valore di verità in tutti i mondi
- In tal caso diciamo che la proposizione è **conseguenza logica** degli assiomi

Conseguenza logica

Sia $\Gamma = F_1, \dots, F_n$ un insieme di sentenze e sia F una proposizione.

F è *conseguenza logica* di Γ ($\Gamma \Vdash F$) quando F è vera in tutti i modelli di Γ , ovvero in tutti i mondi in cui ognuna delle F_i è vera

Conseguenza logica

Intuizioni per $\Gamma \Vdash F$:

- Le sentenze in Γ costituiscono dei **vincoli** che i mondi debbono rispettare
- $\Gamma \Vdash F$ quando i vincoli sono **sufficienti** a garantire che F sia una verità in tutti i mondi che soddisfano i vincoli
- **Più** sono i **vincoli**, potenzialmente **meno** sono i **mondi** che li soddisfano, potenzialmente **più** sono le **conseguenze logiche** dei vincoli

Altra intuizione:

- Se $\Gamma \Vdash F$ allora la “verità” di F (l’insieme dei mondi in cui F è vera) è già inclusa (è un sovrainsieme di) nella “verità” di Γ (l’insieme dei mondi in cui le formule di Γ sono vere)

Equivalenza logica

Siano F e G due sentenze.

F è logicamente equivalente a G ($F \equiv G$) sse $F \Vdash G$ e $G \Vdash F$

Equivalentemente: $F \equiv G$ sse F e G sono soddisfatte dagli stessi mondi.

Teorema: l'equivalenza logica è una relazione di equivalenza

Dimostrazione:

$F \equiv F$ in quanto in ogni mondo, se F è vera allora F è vera

se $F \equiv G$ allora $G \equiv F$: perchè?

se $F \equiv G$ e $G \equiv H$ allora $F \equiv H$: perchè?

Quando una teoria è interessante? (1/2)

Se le teorie descrivono insiemi di mondi, esse non sono mai “vere” o “false”, “giuste” o “sbagliate” (rispetto a cosa?)

Una teoria è **inconsistente** quando non ammette modelli, ovvero in nessun mondo tutti gli assiomi sono contemporaneamente veri.

Esempio: $0 = 1, 0 \neq 1, \forall x.x = x$ è una teoria inconsistente

Fatto ovvio: se Γ è inconsistente allora per ogni F si ha $\Gamma \Vdash F$
Dimostrazione: F deve valere nell'insieme vuoto di modelli, il che è vero

Corollario: **se Γ è inconsistente allora $\Gamma \Vdash \perp$** dove \perp è una proposizione falsa (anche chiamata assurdo)

Quando una teoria è interessante? (2/2)

Un teorema complesso (che non dimostreremo) dice che è vero anche il contrario:

Teorema: se $\Gamma \Vdash \perp$ allora Γ è inconsistente, ovvero non ha modelli.

Tutte le teorie consistenti (= non inconsistenti, in cui l'assurdo non è conseguenza logica) sono interessanti: esse hanno almeno un modello in cui tutte le conseguenze logiche di Γ sono vere.

Fare matematica = studiare le conseguenze logiche di un insieme di assiomi (= studiarne la teoria)

Una teoria è tanto più interessante di altre quanto più le sue conseguenze logiche sono utili una volta applicate ad altri campi (p.e. fisica, meteorologia, informatica, . . .), ma le applicazioni potrebbero essere scoperte solo diversi secoli dopo (p.e. la teoria dei numeri è alla base della crittografia)

Conclusioni

- La verità di una sentenza è sempre definita rispetto a:
 - 1 un mondo
 - 2 l'interpretazione degli enti primitivi nel mondo
- Normalmente, il valore di verità di una sola sentenza non è interessante: varia al variare del mondo
- Conseguenza logica: $\Gamma \Vdash F$ quando in ogni mondo che rende vere tutte le sentenze di Γ anche F è necessariamente vera
- Equivalenza logica: chiusura simmetrica della conseguenza logica