Linguaggi

Completezza della Deduzione Naturale per la Logica Proposizionale Classica

Claudio Sacerdoti Coen

<sacerdot@cs.unibo.it>

Universitá di Bologna

04-06/12/2017

Obiettivi

Abbiamo introdotto la semantica e la deduzione naturale per la logica proposizionale classica.

Abbiamo dimostrato il teorema di correttezza. Ci manca quello di completezza:

1. Correttezza:
$$\forall \Gamma, F. \Gamma \vdash F \Rightarrow \Gamma \Vdash F$$
2. Completezza (forte):
$$\forall \Gamma, F. \Gamma \Vdash F \Rightarrow \Gamma \vdash F$$

Ma prima...

Prima di procedere ci servono due risultati, noti sotto il nome di teoremi di deduzione semantica/sintattica.

Teorema di deduzione sintattica

Teorema di deduzione sintattica (caso unario): per tutte le formule F, G si ha

$$F \vdash G \quad \text{sse} \quad \vdash F \Rightarrow G$$

Dimostrazione: ovvia. La parte $\Rightarrow$ si ottiene con un passo di $\Rightarrow_i$; la parte $\Leftarrow$ con un passo di $\Rightarrow_e$.

$$\cfrac{\begin{matrix}[F] \\ \vdots \\ G\end{matrix}}{F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_i) \qquad \cfrac{F \Rightarrow G \quad F}{G}\ (\Rightarrow_e)$$

Teorema di deduzione semantica

Teorema (di deduzione semantica nel caso unario):
per tutte le F e G si ha

$$\Gamma \Vdash F \Rightarrow G \quad \text{sse} \quad \Gamma, F \Vdash G$$

Dimostrazione:

- Parte $\Rightarrow$:
  Per ipotesi $\Gamma \Vdash F \Rightarrow G$.
  Ovvero in ogni mondo v tale che $v \Vdash \Gamma$ si ha
  $[\![F \Rightarrow G]\!]^v = \max\{1 - [\![F]\!]^v, [\![G]\!]^v\} = 1$
  ovvero $[\![F]\!]^v = 0$ oppure $[\![G]\!]^v = 1$.
  Dobbiamo dimostrare che in ogni mondo v tale che
  $v \Vdash \Gamma, F$ si ha $[\![G]\!]^v = 1$.
  Sia v un mondo generico ma fissato.
  Per ipotesi si ha $v \Vdash F$ ovvero $[\![F]\!]^v = 1$.
  Quindi necessariamente $[\![G]\!]^v = 1$.

Teorema di deduzione semantica

Teorema (di deduzione semantica nel caso unario):
per ogni formula F e G si ha $\Gamma \Vdash F \Rightarrow G$ sse $\Gamma, F \Vdash G$.

Dimostrazione:

- Parte $\Leftarrow$:
  Per ipotesi $\Gamma, F \Vdash G$.
  Ovvero in ogni mondo v tale che $v \Vdash \Gamma, F$ si ha $[\![G]\!]^v = 1$.
  Dobbiamo dimostrare che in ogni mondo v tale che $v \Vdash \Gamma$ si ha $[\![F \Rightarrow G]\!]^v = \max\{1 - [\![F]\!]^v, [\![G]\!]^v\} = 1$.
  Sia v un mondo generico ma fissato.
  Per ipotesi si ha $v \Vdash \Gamma$.
  Se $[\![F]\!]^v = 1$, allora $v \Vdash \Gamma, F$ e quindi necessariamente $[\![G]\!]^v = 1$ e $[\![F \Rightarrow G]\!]^v = 1$.
  Altrimenti, se $[\![F]\!]^v = 0$, allora $[\![F \Rightarrow G]\!]^v = 1$.

Teorema di deduzione semantica

Teorema (di deduzione semantica):
per tutte le formule $F_1, \ldots, F_n, G$ si ha

$$F_1, \ldots, F_n \Vdash G \text{ sse } \Vdash F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_n \Rightarrow G$$

Dimostrazione: procediamo per induzione su n.
Caso base: $\Vdash G$ sse $\Vdash G$ ovvio.
Passo induttivo (caso n): sia $\Gamma = F_1, \ldots, F_{n+1}$.
Ipotesi induttiva: $\forall G,\ F_1, \ldots, F_n \Vdash G \text{ sse } \Vdash F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_n \Rightarrow G$
Si applica il teorema di deduzione semantica appena dimostrato per concludere

$$F_1, \ldots, F_n, F_{n+1} \Vdash G \text{ sse } F_1, \ldots, F_n \Vdash F_{n+1} \Rightarrow G$$

Il teorema segue dall'ipotesi induttiva

$$F_1, \ldots, F_n \Vdash F_{n+1} \Rightarrow G \text{ sse } \Vdash F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_n \Rightarrow F_{n+1} \Rightarrow G$$

Teorema di deduzione sintattica

Teorema (di deduzione sintattica):
per tutte le formule $F_1, \ldots, F_n, G$ si ha

$$F_1, \ldots, F_n \vdash G \text{ sse } \vdash F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_n \Rightarrow G$$

Dimostrazione: identica a quella della deduzione semantica.

Note:

1. I due teoremi spiegano il senso dell'implicazione materiale: essa è quel connettivo che cattura sintatticamente la conseguenza logica
2. Data $\Gamma \vdash F$, o Γ è infinito oppure è equivalente a una tautologia $\vdash \Gamma \Rightarrow F$ (intesa come $G_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow G_n \Rightarrow F$ dove $\Gamma = G_1, \ldots, G_n$)

Teorema di completezza forte vs debole

Teorema di completezza forte:

$$\forall \Gamma, F.\, \Gamma \Vdash F \Rightarrow \Gamma \vdash F$$

Teorema di completezza debole:

$$\forall \Gamma, F.\, \text{se } \Gamma \text{ è finito allora } \Gamma \Vdash F \Rightarrow \Gamma \vdash F$$

Equivalentemente, usando i teoremi di deduzione sintattica e semantica:

Teorema di completezza debole:

$$\forall F, \Vdash F \Rightarrow \vdash F$$

(ovvero, se F è una tautologia, allora F è un teorema)

Teorema di completezza forte vs debole

Il teorema di completezza forte sarà dimostrabile solamente usando una meta-logica classica in quanto nessun algoritmo può costruire $\Gamma \vdash F$ quando Γ è un insieme infinito.

Intuizione: nessun algoritmo può in un tempo finito esaminare un input di dimensione infinita. In questo caso nessun algoritmo può trovare in un tempo finito il sottoinsieme di ipotesi di Γ necessarie a dimostrare F.

Dimostreremo il teorema di completezza debole usando una meta-logica intuizionista, ovvero daremo IMPLICITAMENTE un algoritmo completo (ma in genere inefficiente) di ricerca delle prove in deduzione naturale classica.

Teorema di compattezza

Teorema (classico) di compattezza per la logica proposizionale classica:

$$\forall \Gamma, F. \Gamma \Vdash F \Rightarrow \exists \Delta \subseteq_{fin} \Gamma \wedge \Delta \Vdash F$$

ovvero se F è conseguenza logica di un insieme anche infinito di ipotesi, è già conseguenza logica di un suo sottoinsieme finito anche se non posso sapere di quale insieme si tratta!

Teorema di compattezza per la logica proposizionale classica, assumendo la completezza forte:
$\forall \Gamma, F. \Gamma \Vdash F \Rightarrow \exists \Delta \subseteq_{fin} \Gamma \wedge \Delta \Vdash F$. Dimostrazione: siano Γ ed F tali che $\Gamma \Vdash F$. Per il teorema di completezza forte si ha $\Gamma \vdash F$, ovvero esiste un albero di derivazione la cui radice è F e le cui foglie sono un insieme finito $\Delta \subseteq \Gamma$. Per correttezza si ha $\Delta \Vdash F$. Qed.

compattezza, completezza debole $\Vdash$ completezza forte

Teorema di completezza forte per la logica proposizionale classica, assumendo la compattezza: per ogni Γ, F, se $\Gamma \Vdash F$ allora $\Gamma \vdash F$.
Dimostrazione: sia $\Gamma \Vdash F$. Per il teorema di compattezza esiste (ma non so qual'è...) $\Delta \subseteq \Gamma$, Δ finito tale che $\Delta \Vdash F$. Per il teorema di completezza debole si ha $\Delta \vdash F$ e quindi $\Gamma \vdash F$.
Qed.

Riassunto

- completezza debole, correttezza si dimostrano intuizionisticamente (algoritmicamente)
- compattezza, completezza debole $\Vdash$ completezza forte
- correttezza, completezza forte $\Vdash$ compattezza

Quindi sia il teorema di compattezza che quello di completezza forte NON hanno un contenuto algoritmico (non si sa quali ipotesi usare) e NON VALGONO per logiche complesse (più del prim'ordine).

In effetti, intuitivamente, perchè mai dovrebbe valere che un'infinità di ipotesi (vincoli sui mondi) equivalgono sempre a un insieme finito di ipotesi per dimostrare una formula data? La prova, che è per assurdo, non fornisce alcuna intuizione.

Deduzione naturale per la logica classica: EM

Metodo generalizzato di prova per terzo escluso:
Sia F una formula da dimostrarsi. Ripetendo per ognuna delle variabili in $Var(F) = \{A_1, \ldots, A_n\}$ l'analisi per casi sull'excluded middle $A_i \vee \neg A_i$, ci si riduce a dimostrare 2^n volte F, ognuna sotto a n ipotesi aggiuntive $[F_1], \ldots, [F_n]$ tali che per ogni i si ha $F_i \in \{A_i, \neg A_i\}$.

Esempio: dimostrare $A \wedge B, B \Rightarrow C \vdash A \vee C$ usando il metodo generalizzato su A e su B.

Nota: usando il metodo generalizzato in genere NON si trovano le dimostrazioni più semplici/naturali.
Tuttavia il metodo può essere usato meccanicamente per decidere se $\vdash F$ (vedi teorema di completezza nei prossimi lucidi).

Dimostrazione del teorema di completezza debole per la logica classica.

Dimostriamo il teorema nella sua forma equivalente se $\Vdash F$ allora $\vdash F$.

La prima fase della dimostrazione consiste nell'applicare il metodo generalizzato per ridursi, tramite il principio di EM (e quindi tramite la RAA), a costruire 2^n alberi di prova $\Delta_i \vdash F$ ove $n = |Var(F)| = |\{A_1, \ldots, A_n\}|$ e l'i-esimo contesto Δ_i è in relazione come segue con l'i-esima riga v_i della tabella di verità per $\Vdash F$: $\Delta_i = A_1^*, \ldots, A_n^*$ dove per ogni j si ha $A_j^* = A_j$ se $v_i(A_j) = 1$ e $A_j^* = \neg A_j$ se $v_i(A_j) = 0$.

Poichè per ipotesi $\Vdash F$ si ha che, per ogni i, $v_i \Vdash F$. Dobbiamo dimostrare $\Delta_i \vdash F$ per ogni i.

Teorema di completezza per la logica classica

Lemma: per ogni F, per ogni i e per ogni v_i e Δ_i definiti come sopra, si ha

1. se $v_i \Vdash F$ allora $\Delta_i \vdash F$
2. se $v_i \nVdash F$ allora $\Delta_i \vdash \neg F$

Nota: la dimostrazione del lemma è costruttiva.

Dimostrazione: per induzione strutturale su F.

Caso A_j:

1. se $v_i \Vdash A_j$ allora $v_i(A_j) = 1$ e quindi $A_j \in \Delta_i$ e $\Delta_i \vdash A_j$
2. se $v_i \nVdash A_j$ allora $v_i(A_j) = 0$ e quindi $\neg A_j \in \Delta_i$ e $\Delta_i \vdash \neg A_j$

Caso $F_1 \wedge F_2$:
Per ipotesi induttiva, per ogni $h \in \{1,2\}$ si ha

1. se $v_i \Vdash F_h$ allora $\Delta_i \vdash F_h$
2. se $v_i \not\Vdash F_h$ allora $\Delta_i \vdash \neg F_h$

Procediamo per casi su $v_i \Vdash F_1 \wedge F_2$ o $v_i \not\Vdash F_1 \wedge F_2$.

1. Caso $v_i \Vdash F_1 \wedge F_2$ o, equivalentemente $[\![F_1 \wedge F_2]\!]^v = \min\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = 1$ e quindi $[\![F_1]\!]^v = [\![F_2]\!]^v = 1$ e, per ipotesi induttiva, $\Delta_i \vdash F_1$ e $\Delta_i \vdash F_2$:

$$\dfrac{\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ F_1 & F_2 \end{array}}{F_1 \wedge F_2}\ (\wedge_i)$$

2. Caso $v_i \not\Vdash F_1 \wedge F_2$ o, equivalentemente $[\![F_1 \wedge F_2]\!]^v = 0$ e quindi vi è un F_h con $h \in \{1,2\}$ t.c. $[\![F_h]\!]^v = 0$.

Per ipotesi induttiva $\Delta_i \vdash \neg F_h$ e quindi

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \neg F_h\end{matrix} \qquad \dfrac{[F_1 \land F_2]}{F_h}\,(\land e_h)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(F_1 \land F_2)}\,(\neg_i)$$

Teorema di completezza per la logica classica

Caso $F_1 \vee F_2$:
Per ipotesi induttiva, per ogni $h \in \{1,2\}$ si ha

1. se $v_i \Vdash F_h$ allora $\Delta_i \vdash F_h$
2. se $v_i \nVdash F_h$ allora $\Delta_i \vdash \neg F_h$

Procediamo per casi su $v_i \Vdash F_1 \vee F_2$ o $v_i \nVdash F_1 \vee F_2$.

1. Caso $v_i \Vdash F_1 \vee F_2$ o, equivalentemente $[\![F_1 \vee F_2]\!]^v = \max\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = 1$ e quindi vi è un $h \in \{1,2\}$ t.c. $[\![F_h]\!]^v = 1$ e, per ipotesi induttiva, $\Delta_i \vdash F_h$:

$$\cfrac{\begin{matrix}\vdots\\ F_h\end{matrix}}{F_1 \vee F_2}\ (\vee_{i_h})$$

2. Caso $v_i \nVdash F_1 \vee F_2$ o, equivalentemente $[\![F_1 \vee F_2]\!]^v = 0$ e quindi $[\![F_1]\!]^v = [\![F_2]\!]^v = 0$.

Teorema di completezza per la logica classica

Per ipotesi induttiva $\Delta_i \vdash \neg F_1$ e $\Delta_i \vdash \neg F_2$ e quindi

$$
\cfrac{\cfrac{[F_1 \vee F_2] \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \neg F_1\end{array} \qquad [F_1]}{\bot} \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \neg F_2\end{array} \qquad [F_2]}{\bot}}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(F_1 \vee F_2)}\,(\neg_i)
$$

Caso $\neg F$:
Per ipotesi induttiva si ha

1. se $v_i \Vdash F$ allora $\Delta_i \vdash F$
2. se $v_i \nVdash F$ allora $\Delta_i \vdash \neg F$

Procediamo per casi su $v_i \Vdash \neg F$ o $v_i \nVdash \neg F$.

1. Caso $v_i \Vdash \neg F$ o, equivalentemente $[\![\neg F]\!]^v = 1$ e quindi $[\![F]\!]^v = 0$ e, per ipotesi induttiva, $\Delta_i \vdash \neg F$.
2. Caso $v_i \nVdash \neg F$ o, equivalentemente $[\![\neg F]\!]^v = 0$ e quindi $[\![F]\!]^v = 1$ e, per ipotesi induttiva, $\Delta_i \vdash F$:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg F] \qquad \begin{matrix}\vdots \\ F\end{matrix}}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg F}\,(\neg_i)$$

Teorema di completezza per la logica classica

Caso $F_1 \Rightarrow F_2$:
Per ipotesi induttiva, per ogni $h \in \{1,2\}$ si ha

1. se $v_i \Vdash F_h$ allora $\Delta_i \vdash F_h$
2. se $v_i \nVdash F_h$ allora $\Delta_i \vdash \neg F_h$

Procediamo per casi su $v_i \Vdash F_1 \Rightarrow F_2$ o $v_i \nVdash F_1 \Rightarrow F_2$.

1. Caso $v_i \Vdash F_1 \Rightarrow F_2$ o, equivalentemente $[\![F_1 \Rightarrow F_2]\!]^v = \max\{1 - [\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = 1$ e quindi o $[\![F_1]\!]^v = 0$ e, per ipotesi induttiva, $\Delta_i \vdash \neg F_1$, oppure $[\![F_2]\!]^v = 1$ e, per ipotesi induttiva, $\Delta_i \vdash F_2$.
   Vedi slide successiva per ambedue i casi.
2. Caso $v_i \nVdash F_1 \Rightarrow F_2$ o, equivalentemente $[\![F_1 \Rightarrow F_2]\!]^v = 0$ e quindi $[\![F_1]\!]^v = 1$ e $[\![F_2]\!]^v = 0$ e, per ipotesi induttiva, $\Delta_i \vdash F_1$ e $\Delta_i \vdash \neg F_2$. Vedi slide dopo la prossima.

Teorema di completezza per la logica classica

Casi $\Delta_i \vdash \neg F_1$ e $\Delta_i \vdash F_2$, dobbiamo dimostrare $\Delta_i \vdash F_1 \Rightarrow F_2$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \neg F_1\end{array} \qquad [F_1]}{\bot}\,(\neg_e)}{F_2}\,(\bot_e)}{F_1 \Rightarrow F_2}\,(\Rightarrow_i) \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ F_2\end{array}}{F_1 \Rightarrow F_2}\,(\Rightarrow_i)$$

Caso $\Delta_i \vdash F_1$ e $\Delta_i \vdash \neg F_2$, dobbiamo dimostrare $\Delta_i \vdash \neg(F_1 \Rightarrow F_2)$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \neg F_2\end{array} \qquad \dfrac{[F_1 \Rightarrow F_2] \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ F_1\end{array}}{F_2}\,(\Rightarrow_e)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(F_1 \Rightarrow F_2)}\,(\neg_i)$$

Qed.

Teorema di completezza per la logica classica

La dimostrazione intuizionista del teorema ci dà un algoritmo per costruire automaticamente prove di $\vdash F$. L'algoritmo trova una dimostrazione sse la precondizione $\Vdash F$ vale.

Quando la dimostrazione procede per casi su $\Vdash F$ (p.e. discriminando il caso $\Vdash F_1$ dal caso $\Vdash F_2$ quando $F = F_1 \vee F_2$), l'algoritmo procede scegliendo a caso uno dei rami e facendo backtracking nel caso l'algoritmo "si inceppi".

L'algoritmo si inceppa sulle variabili proposizionali: può darsi che si arrivi a dover dimostrare $\vdash A$, ma nel contesto ci sia l'ipotesi scaricata $[\neg A]$ invece di quella A. Questo avviene quando una scelta sbagliata ha portato a violare la precondizione nella chiamata ricorsiva.

Esempio (alla lavagna): dimostrare $\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$ eseguendo l'algoritmo

Teorema di compattezza per la deduzione naturale classica: cenni

Diamo solo l'idea di come proceda la prova e perchè la prova richieda una meta-logica classica.

1. Enunciato: per ogni Γ, F, se $\Gamma \Vdash F$ allora esiste (ma non so qual'è...) $\Delta \subseteq \Gamma$, Δ finito tale che $\Delta \Vdash F$.
2. Equivalentemente: per ogni Γ, F, se $\Gamma, \neg F \Vdash \bot$ allora esiste (ma non so qual'è...) $\Delta \subseteq \Gamma$, Δ finito tale che $\Delta, \neg F \Vdash \bot$.
3. Generalizzando, per ogni Γ, Γ è insoddisfacibile sse esiste (ma non so qual'è...) $\Delta \subseteq \Gamma$, Δ finito tale che Δ è insoddisfacibile.
4. Equivalentemente: per ogni Γ, Γ è soddisfacibile sse ogni $\Delta \subseteq \Gamma$, Δ finito lo è.
5. Ovvero per ogni Γ, esiste un mondo v t.c. $v \Vdash \Gamma$ sse per ogni $\Delta \subseteq \Gamma$, Δ finito esiste un mondo v_Δ t.c. $v_\Delta \Vdash \Delta$.

Teorema di compattezza per la deduzione naturale classica: cenni

Dimostriamo per ogni Γ, esiste un mondo v t.c. $v \Vdash \Gamma$ sse per ogni $\Delta \subseteq \Gamma$, Δ finito esiste un mondo v_Δ t.c. $v_\Delta \Vdash \Delta$.

Caso $\Rightarrow$: fisso Γ e v e suppongo $v \Vdash \Gamma$ (ovvero v soddisfa tutte le formule $G \in \Gamma$). Fisso Δ tale che $\Delta \subseteq \Gamma$. Si ha $v \Vdash \Delta$ e quindi per ogni Δ esiste un v_Δ, che è v, tale che $v_\Delta \Vdash \Delta$.

Caso $\Leftarrow$: fisso Γ tale che per ogni $\Delta \subseteq \Gamma$, Δ finito esiste un mondo v_Δ t.c. $v_\Delta \Vdash \Delta$. Debbo dire come è fatto v tale che $v \Vdash \Gamma$.

Ogni v_Δ è una sequenza infinita di bit, esempio:

$v_{\Delta_0} = 0, 1, 1, 0, 0, 1, \ldots$

$v_{\Delta_1} = 1, 1, 0, 0, 1, 1, \ldots$

$\ldots$

Questo non mi da nessuna informazione nemmeno per sapere il primo bit di v! 0 o 1?

Teorema di compattezza per la deduzione naturale classica: cenni

La dimostrazione, complessa, grosso modo procede come segue:

1. costruisce uno alla volte i bit di v
2. ogni bit viene determinato con un terzo escluso: o quando il bit è 0 vale una certa proprietà complessa oppure essa non vale
3. quando non vale con una dimostrazione complessa si fa vedere che la proprietà vale quando il bit è a 1
4. infine sapendo che la proprietà vale per tutti i bit si deduce che $v \Vdash \Gamma$

Quindi la dimostrazione usa una quantità enumerabile di terzi esclusi e chiaramente non è algoritmica.