Deduzione naturale

Claudio Sacerdoti Coen

<sacerdot@cs.unibo.it>

Universitá di Bologna

20,22,.../11/2017

Deduzione naturale: sintassi

$$B, D \wedge A \vdash A \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow C \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge (B \Rightarrow C)]}{B \Rightarrow C}\wedge_{e2} \quad B}{C}\Rightarrow_e}{A \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow C}\Rightarrow_i$$

Un albero di deduzione naturale per $\Gamma \vdash F$ è una struttura dati arborescente tale che

- i nodi sono etichettati con delle formule
- le foglie sono formule scaricate (o cancellate) $[G]$ (ipotesi locali) oppure formule non scaricate G ipotesi (globali)
- la radice è etichettata con F
- le foglie non scaricate sono etichettate con formule appartenenti a Γ
- i nodi interni, oltre alla formula, sono etichettati con delle regole di inferenza

Deduzione naturale: passi di inferenza

Usiamo la seguente sintassi per le regole di inferenza:

$$\frac{F_1 \ldots F_n}{F} \qquad (\textsc{Nome Regola})$$

La formula F è la conclusione della regola.
Le formule $F_1, \ldots, F_n$ sono le premesse della regola.

La premessa F_i verrà indicata con $\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ F_i\end{array}$ per indicare che è possibile assumere localmente A per concludere F_i.

Una regola senza premesse ($n = 0$) si dice assioma.

Deduzione naturale: alberi di deduzione

Gli alberi di deduzione vengono indicati componendo ricorsivamente regole di inferenza. Esempio:

$$\cfrac{\cfrac{F_1 \ldots F_n}{H_1}\ (regola-1) \quad \ldots \quad \cfrac{G_1 \ldots G_m}{H_l}\ (regola-l)}{H}\ (regola-x)$$

Nell'esempio $\frac{F_1 \ldots F_n}{H_1}$ $(regola-1)$ è un sottoalbero dell'intero albero di deduzione.

La struttura ricorsiva permette di definire funzioni per ricorsione strutturale su alberi di deduzione e di effettuare prove per induzione strutturale.

Deduzione naturale: passi di inferenza

Vi sono due tipi di passi di inferenza:

1. Regole di introduzione di un connettivo:
   ci dicono tutti i modi in cui concludere direttamente una formula con in testa un determinato connettivo
   come concludo ...?
2. Regole di eliminazione di un connettivo:
   ci dicono tutti i modi in cui utilizzare direttamente un'ipotesi con in testa un determinato connettivo
   cosa ricavo da ...?

Deduzione naturale: passi di inferenza

Ogni passo di inferenza ammette sempre due letture:

1. Bottom-up (dalle premesse alla conclusione):
   date le premesse $F_1, \ldots, F_n$, posso concludere F
2. Top-down (dalla conclusione alle premesse):
   per concludere F posso ridurmi a dimostrare $F_1, \ldots, F_n$

Segreto dei matematici:

- Le prove vengono cercate in maniera prevalentemente top-down, riducendo la conclusione a sotto-conclusioni più semplici
- Le prove vengono poi presentate in maniera prevalentemente bottom-up per aumentarne l'eleganza

Deduzione naturale: correttezza

Una regola $\frac{F_1 \ldots F_n}{H}$ (*nome*) è correTta quando $F_1, \ldots, F_n \Vdash H$

Se una premessa contempla ipotesi scaricate, esse vanno integrate tramite applicazioni nella formula finale. Esempio:

$$\dfrac{E \qquad \begin{matrix}[F] \\ \vdots \\ G\end{matrix}}{H}\ (nome)$$

è corretta quando $E, F \Rightarrow G \Vdash H$

LE REGOLE CORRETTE DIMOSTRANO SOLO CONSEGUENZE LOGICHE

Deduzione naturale: correttezza e invertibilità

Noi saremo interessati solamente a regole corrette e tutte quelle che vi mosterò sono corrette.

Definizione: una regola $\frac{F_1 \ldots F_n}{F}$ è invertibile quando per ogni i si ha $F \Vdash F_i$. Come per la correttezza, eventuali ipotesi scaricate (p.e. H) di F_i vanno integrate con una implicazione (es. $F \Vdash H \Rightarrow F_i$).

L'invertibilità gioca un ruolo importante nella ricerca delle prove: se la regola è invertibile, può essere sempre applicata nella ricerca top-down della prova senza portare a vicoli ciechi. Inoltre non c'è bisogno di fare backtracking su quella regola nel caso il tentativo di dimostrazione precedente non abbia portato da nessuna parte.

Deduzione naturale: $\wedge$

Regole di introduzione:

$$\frac{F_1 \quad F_2}{F_1 \wedge F_2} \quad (\wedge_i)$$

Lettura bottom-up: se F_1 e F_2 allora $F_1 \wedge F_2$.

Lettura top-down: per dimostrare $F_1 \wedge F_2$ debbo dimostrare sia F_1 che F_2.

Scrittura informale (spesso lasciata implicita):
…e quindi F_1
…e quindi F_2
[e quindi $F_1 \wedge F_2$]

In Matita:
…we proved F_1 (H1)
…we proved F_2 (H2)
by H1, H2, conj we proved $F_1 \wedge F_2$

Deduzione naturale: $\wedge$

$$\frac{F_1 \quad F_2}{F_1 \wedge F_2} \qquad (\wedge_i)$$

Correttezza classica: $F_1, F_2 \Vdash F_1 \wedge F_2$ in quanto, per ogni mondo v, se $[\![F_1]\!]^v = [\![F_2]\!]^v = 1$ allora $[\![F_1 \wedge F_2]\!]^v = \min\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = 1$.

Invertibilità classica: $F_1 \wedge F_2 \Vdash F_i$ per $i \in \{1, 2\}$ in quanto, per ogni mondo v, se $[\![F_1 \wedge F_2]\!]^v = \min\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = 1$ allora $[\![F_i]\!]^v = 1$ per $i \in \{1, 2\}$.

Deduzione naturale: $\wedge$

Regola di eliminazione:

$$\dfrac{F_1 \wedge F_2 \qquad \begin{matrix}[F_1][F_2] \\ \vdots \\ F_3\end{matrix}}{F_3} \qquad (\wedge_e)$$

Lettura bottom-up: se $F_1 \wedge F_2$ e se ipotizzando F_1 e F_2 concludo F_3, allora F_3.

Lettura top-down: per dimostrare F_3 data l'ipotesi $F_1 \wedge F_2$ è sufficiente dimostrare F_3 sotto le ipotesi F_1 e F_2.

Scritture informale:
…$F_1 \wedge F_2$
[supponiamo F_1 e anche F_2]
…e quindi F_3
[e quindi F_3]
L'applicazione della regola viene sempre lasciata implicita.

In Matita:
…we proved $(F_1 \wedge F_2)$ (H)
by H we have F_1 (H1) and F_2 (H2)

Deduzione naturale: $\wedge$

Regola di eliminazione:

$$\dfrac{F_1 \wedge F_2 \qquad \begin{matrix}[F_1][F_2] \\ \vdots \\ F_3\end{matrix}}{F_3} \quad (\wedge_e)$$

Nota: un albero di derivazione che termini applicando la regola $\wedge_e$ ha due sotto-alberi immediati. Il primo dimostra $F_1 \wedge F_2$. Il secondo dimostra F_3 usando, fra le altre, le ipotesi F_1 e F_2 NON ANCORA SCARICATE. È l'applicazione della regola che scarica le ipotesi dal sotto-albero.

Deduzione naturale: $\wedge$

Regola di eliminazione:

$$\dfrac{F_1 \wedge F_2 \qquad \begin{matrix}[F_1][F_2] \\ \vdots \\ F_3\end{matrix}}{F_3} \qquad (\wedge_e)$$

Correttezza classica: $F_1 \wedge F_2, F_1 \Rightarrow F_2 \Rightarrow F_3 \Vdash F_3$ in quanto, per ogni mondo v tale che $\min\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = 1$ (e quindi $[\![F_1]\!]^v = [\![F_2]\!]^v = 1$) e $[\![F_1 \Rightarrow F_2 \Rightarrow F_3]\!]^v = 1$ (e quindi $\max\{1 - [\![F_1]\!]^v, 1 - [\![F_2]\!]^v, [\![F_3]\!]^v\} = \max\{0, 0, [\![F_3]\!]^v\} = 1$) si ha $[\![F_3]\!]^v = 1$.

Deduzione naturale: $\wedge$

Regola di eliminazione:

$$\frac{F_1 \wedge F_2 \qquad \begin{array}{c}[F_1][F_2]\\ \vdots \\ F_3\end{array}}{F_3} \quad (\wedge_e)$$

La regola non è invertibile. Esempio: $F_3 = \top$ e $F_1, F_2 = \bot$: si ha $\top \not\Vdash \bot \wedge \bot$

La regola è invertibile se si assume $F_1 \wedge F_2$: ovvio in quanto $F_3 \Vdash F_1 \Rightarrow F_2 \Rightarrow F_3$

Deduzione naturale: $\wedge$

Regole alternative di eliminazione:

$$\frac{F_1 \wedge F_2}{F_1} \qquad (\wedge_{e_1})$$

$$\frac{F_1 \wedge F_2}{F_2} \qquad (\wedge_{e_2})$$

Lettura bottom-up: se $F_1 \wedge F_2$ allora F_1 (e F_2).
Lettura top-down: per dimostrare F_1 (o F_2) basta dimostrare $F_1 \wedge F_2$.
Scrittura informale:
…e quindi $F_1 \wedge F_2$
[e quindi F_1]
Le due regole vengono quasi sempre omesse.

Deduzione naturale: $\wedge$

Regole alternative di eliminazione:

$$\frac{F_1 \wedge F_2}{F_1} \qquad (\wedge_{e_1})$$

$$\frac{F_1 \wedge F_2}{F_2} \qquad (\wedge_{e_2})$$

Correttezza classica $F_1 \wedge F_2 \Vdash F_i$ per $i \in \{1, 2\}$ in quanto in ogni mondo v tale che $[\![F_1 \wedge F_2]\!]^v = \min\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = 1$ si ha $[\![F_i]\!]^v = 1$ per $i \in \{1, 2\}$

Deduzione naturale: $\wedge$

Regole alternative di eliminazione:

$$\frac{F_1 \wedge F_2}{F_1} \qquad (\wedge_{e_1})$$

$$\frac{F_1 \wedge F_2}{F_2} \qquad (\wedge_{e_2})$$

Le due regole non sono invertibili: esempio $F_1 = \top$ e $F_2 = \bot$: si ha $\top \not\Vdash \top \wedge \bot$.

Deduzione naturale: ricerca delle prove

Le prove si possono cercare in vari modi:

1. Bottom-up: partendo dalle ipotesi si applicano in avanti le regole fino a trovare la conclusione.
   - Pro: non si commettono mai errori
   - Cons: è molto difficile vedere le prove così perchè vi sono troppe strade che non portanto alla conclusione cercata
2. Top-down: partendo dalla conclusione si applicano indietro le regole fino a ridursi a un sottoinsieme delle ipotesi.
   - Pro: più facile trovare le dimostrazioni se si sta attenti a non sbagliarsi (= ridursi a dimostrare qualcosa di non vero)
   - Cons: è possibile sbagliarsi quando si applicano regole non invertibili
3. Strategia mista: si alternano le due strategie, tipicamente partendo con una top-down.

Deduzione naturale: ricerca delle prove

Come evitare errori?

1. Dopo l'applicazione top-down di una regola di inferenza non invertibile, accertarsi che la conclusione sia ancora dimostrabile a partire dalle premesse.

   Esempio: per dimostrare $A \land B \vdash A$ si parte da A e lo si riduce a $A \land C$. Si ha $A \land B \not\Vdash A \land C$ (anche se $A \land B \Vdash A$).

2. Verificare di non essersi ridotti a dimostrare qualcosa che si sta già dimostrando con le stesse ipotesi (ragionamento circolare).

   Esempio: per dimostrare A ci si riduce a dimostrare $A \land B$ che dimostriamo riducendoci a dimostrare sia A che B.

Deduzione naturale: ricerca delle prove

Esercizi (esempi alla lavagna):

- $A \wedge B \vdash B \wedge A$
- $A \wedge (B \wedge C) \vdash (A \wedge B) \wedge C$
- $(A \wedge B) \wedge (C \wedge D) \vdash A \wedge D \wedge A$

1. Cercare le dimostrazioni usando solo $\wedge_i$ e $\wedge_e$
2. Cercare le dimostrazioni usando solo $\wedge_i$, $\wedge_{e_1}$ e $\wedge_{e_2}$.
3. Trascrivere la prova usando il linguaggio di Matita

La prova dell'ultima formula evidenzia la difficoltà della ricerca bottom-up delle prove.

Deduzione naturale: derivabilità

Definizione: un insieme di regole $\mathcal{R}$ è derivabile a partire da un insieme di regole $\mathcal{S}$ quando per ogni regola in $\mathcal{R}$ le cui premesse sono $F_1, \ldots, F_n$ e la cui conclusione è F si ha $F_1, \ldots, F_n \vdash F$ usando solamente le regole in $\mathcal{S}$.

Teorema: se $\mathcal{R}$ è derivabile a partire da $\mathcal{S}$ allora per ogni dimostrazione ottenuta usando solo regole in $\mathcal{R}$ esiste una dimostrazione con le stesse premesse e conclusione che usa solo regole in $\mathcal{S}$.

Dimostrazione: per induzione strutturale sull'albero di derivazione. In tutti i casi, per ipotesi induttiva esistono alberi di derivazione per ognuna delle premesse che usano solo regole in $\mathcal{S}$. Per ipotesi esiste un albero di derivazione per la regola sotto esame che usa solo regole in $\mathcal{S}$. Componendo gli alberi si ottiene la prova voluta.

Deduzione naturale: derivabilità

Teorema: l'insieme $\{\wedge_{e_1}, \wedge_{e_2}\}$ è derivabile a partire dall'insieme $\{\wedge_e\}$ e viceversa.
Dimostrazione:

Prima parte: $\{\wedge_{e_1}, \wedge_{e_2}\}$ è derivabile a partire da $\{\wedge_e\}$.

$$\frac{F_1 \wedge F_2 \quad [F_1]}{F_1}(\wedge_e) \qquad \frac{F_1 \wedge F_2 \quad [F_2]}{F_2}(\wedge_e)$$

Seconda parte: $\{\wedge_e\}$ è derivabile a partire da $\{\wedge_{e_1}, \wedge_{e_2}\}$.

$$\begin{array}{c} \frac{F_1 \wedge F_2}{F_1}(\wedge_{e_1}) \quad \frac{F_1 \wedge F_2}{F_2}(\wedge_{e_2}) \\ \vdots \\ F_3 \end{array}$$

Deduzione naturale: $\vee$

Regole di introduzione:

$$\frac{F_1}{F_1 \vee F_2} \qquad (\vee_{i_1})$$

$$\frac{F_2}{F_1 \vee F_2} \qquad (\vee_{i_2})$$

Lettura bottom-up: se F_1 (F_2) vale, allora vale anche $F_1 \vee F_2$

Lettura top-down: per dimostrare $F_1 \vee F_2$ è sufficiente dimostrare F_1 (F_2)

Scrittura informale:	In Matita:
...e quindi F_1	...we proved F_1 (H)
[e quindi $F_1 \vee F_2$]	by or_introl, H we proved $F_1 \vee F_2$

Il passo di deduzione viene spesso omesso.

Deduzione naturale: $\vee$

Regole di introduzione:

$$\frac{F_1}{F_1 \vee F_2} \qquad (\vee_{i_1})$$

$$\frac{F_2}{F_1 \vee F_2} \qquad (\vee_{i_2})$$

Correttezza: $F_i \Vdash F_1 \vee F_2$ per $i \in \{1, 2\}$ in quanto in ogni mondo v tale che $[\![F_i]\!]^v = 1$ si ha $\max\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = 1$.

Le due regole non sono invertibili: per esempio per $F_1 = \bot$ e $F_2 = \top$ si ha $\bot \vee \top \nVdash \bot$.

Deduzione naturale: $\vee$

Regole di eliminazione:

$$\frac{F_1 \vee F_2 \qquad \begin{array}{c}[F_1]\\ \vdots \\ F_3\end{array} \qquad \begin{array}{c}[F_2]\\ \vdots \\ F_3\end{array}}{F_3} \quad (\vee_e)$$

Lettura bottom-up: se vale $F_1 \vee F_2$ e F_3 vale sia quando vale F_1 che quando vale F_2, allora necessariamente F_3 vale.

Lettura top-down: per dimostrare qualunque cosa sapendo $F_1 \vee F_2$ è sufficiente procedere per casi, dimostrando la stessa cosa assumendo prima che F_1 valga e poi che valga F_2

Scrittura informale:

...e quindi $F_1 \vee F_2$
procediamo per casi per dimostrare F_3
  caso F_1: ...e quindi F_3
  caso F_2: ...e quindi F_3
[e quindi F_3]

In Matita:

...we proved $F_1 \vee F_2$ (H)
we proceed by cases on H to prove F_3
  case F_1: ...we proved F_3. done
  case F_2: ...we proved F_3. done

Deduzione naturale: $\vee$

Regole di eliminazione:

$$\frac{F_1 \vee F_2 \qquad \begin{array}{c}[F_1]\\ \vdots\\ F_3\end{array} \qquad \begin{array}{c}[F_2]\\ \vdots\\ F_3\end{array}}{F_3} \; (\vee_e)$$

Correttezza: si ha $F_1 \vee F_2, F_1 \Rightarrow F_3, F_2 \Rightarrow F_3 \Vdash F_3$ in quanto in ogni mondo v tale che $[\![F_1 \vee F_2]\!]^v = \max\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = 1$ e $[\![F_1 \Rightarrow F_3]\!]^v = \max\{1 - [\![F_1]\!]^v, [\![F_3]\!]^v\} = 1$ e $[\![F_2 \Rightarrow F_3]\!]^v = \max\{1 - [\![F_2]\!]^v, [\![F_3]\!]^v\} = 1$ si ha $[\![F_3]\!]^v = 1$ (il massimo vale 1 sse c'è un $[\![F_i]\!]^v = 1$ e in tal caso $1 = \max\{1 - [\![F_i]\!]^v, [\![F_3]\!]^v\} = \max\{0, [\![F_3]\!]^v\} = [\![F_3]\!]^v$).

Invertibilità: la regola non è invertibile (controesempio: $F_3 = \top$ e $F_1 = F_2 = \bot$). Tuttavia, quando $F_1 \vee F_2$ è dimostrabile, allora la regola è banalmente invertibile.

Deduzione naturale: ricerca delle prove

Esercizi (esempi alla lavagna):

- $A \wedge B \vdash C \vee A$
- $A \vee B \vdash B \vee A$
- $A \vee (B \vee C) \vdash (C \vee B) \vee A$

L'armonia fra regole di introduzione ed eliminazione

$$\frac{F_1}{F_1 \vee F_2} \qquad (\vee_{i_1})$$

$$\frac{F_2}{F_1 \vee F_2} \qquad (\vee_{i_2})$$

$$\frac{F_1 \vee F_2 \quad \begin{array}{c}[F_1]\\ \vdots \\ F_3\end{array} \quad \begin{array}{c}[F_2]\\ \vdots \\ F_3\end{array}}{F_3} \qquad (\vee_e)$$

- ci sono 2 modi diretti per introdurre $F_1 \vee F_2$
- nel modo *i*-esimo si ha come premessa F_i
- la regola di eliminazione analizza come la premessa $F_1 \vee F_2$ viene ricavata
- la regola ha 2 premesse: la *i*-esima assume F_i

L'armonia fra regole di introduzione ed eliminazione

$$\frac{F_1 \quad F_2}{F_1 \land F_2} \qquad (\land_i)$$

$$\frac{F_1 \land F_2 \qquad \begin{array}{c}[F_1][F_2]\\ \vdots \\ F_3\end{array}}{F_3} \qquad (\land_e)$$

- c'è 1 modo diretto per introdurre $F_1 \land F_2$
- si ha come premesse F_1 e F_2
- la regola di eliminazione analizza come la premessa $F_1 \land F_2$ viene ricavata
- la regola ha 1 premessa e assume sia F_i che F_2

Deduzione naturale: $\bot$

Regole di introduzione: NESSUNA.

Regole di eliminazione:

$$\frac{\bot}{F} \qquad (\bot_e)$$

Lettura bottom-up: dal falso segue qualunque cosa.

Lettura top-down: per dimostrare qualunque cosa posso ridurmi a dimostrare un assurdo.

Scrittura informale:	In Matita:
... assurdo	... we proved False (H).
e quindi C	by (ABSURDUM H) done.

Deduzione naturale: $\bot$

Regole di introduzione: NESSUNA.

Regole di eliminazione:

$$\frac{\bot}{F} \qquad (\bot_e)$$

Correttezza: si ha $\bot \Vdash F$

La regola non è invertibile: per esempio quando $F = \top$ si ha $\top \nVdash \bot$

Deduzione naturale: $\top$

Regole di introduzione:

$$\frac{}{\top} \qquad (\top_i)$$

Regola di eliminazione (INUTILE):

$$\frac{\top \quad F}{F} \qquad (\top_e)$$

Lettura bottom-up di $\top_i$: il $\top$ è vero.

Lettura top-down di $\top_i$: per dimostrare $\top$ non debbo fare nulla.

Scrittura informale (sempre omessa)	In Matita:
[$\top$ vale]	by I done.

Deduzione naturale: $\top$

Regole di introduzione:

$$\frac{}{\top} \qquad (\top_i)$$

Regola di eliminazione (INUTILE):

$$\frac{\top \quad F}{F} \qquad (\top_e)$$

Correttezza di $\top_i$: si ha $\Vdash \top$.

Invertibilità di $\top_i$: la regola è invertibile.

Deduzione naturale: $\Rightarrow$

Regole di introduzione:

$$\dfrac{\begin{matrix}[F_1]\\ \vdots \\ F_2\end{matrix}}{F_1 \Rightarrow F_2} \quad (\Rightarrow_i)$$

Lettura bottom-up: se ipotizzando F_1 dimostro F_2 allora $F_1 \Rightarrow F_2$.

Lettura top-down: per dimostrare $F_1 \Rightarrow F_2$ basta assumere F_1 e dimostrare F_2.

Scrittura informale:	In Matita:
supponiamo F_1	suppose F_1 (H)
. . . e quindi F_2	. . . we proved F_2
quindi $F_1 \Rightarrow F_2$	done.

Deduzione naturale: $\Rightarrow$

Regole di introduzione:

$$\frac{\begin{array}{c}[F_1]\\ \vdots \\ F_2\end{array}}{F_1 \Rightarrow F_2} \qquad (\Rightarrow_i)$$

Correttezza e invertibilità: trivialmente $F_1 \Rightarrow F_2 \Vdash F_1 \Rightarrow F_2$

Deduzione naturale: $\Rightarrow$

Regole di eliminazione:

$$\frac{F_1 \Rightarrow F_2 \quad F_1}{F_2} \quad (\Rightarrow_e \text{ o MODUS PONENS})$$

Lettura bottom-up: se F_1 e $F_1 \Rightarrow F_2$, allora necessariamente F_2.

Lettura top-down: per dimostrare F_2 debbo trovare un F_1 che valga e tale per cui $F_1 \Rightarrow F_2$

Scrittura informale:	In Matita:
da F_1 e $F_1 \Rightarrow F_2$ si ha F_2	by H_1, H_2 we proved F_2

Deduzione naturale: $\Rightarrow$

Regole di eliminazione:

$$\frac{F_1 \Rightarrow F_2 \quad F_1}{F_2} \ (\Rightarrow_e \text{ O MODUS PONENS})$$

Correttezza: $F_1 \Rightarrow F_2, F_1 \Vdash F_2$ in quanto in ogni mondo v tale che $[\![F_1]\!]^v = 1$ e $[\![F_1 \Rightarrow F_2]\!]^v = \max\{1 - [\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = \max\{0, [\![F_2]\!]^v\} = [\![F_2]\!]^v = 1$ si ha $[\![F_2]\!]^v = 1$.

Deduzione naturale: $\Rightarrow$

Regole di eliminazione:

$$\frac{F_1 \Rightarrow F_2 \quad F_1}{F_2} \; (\Rightarrow_e \text{ O MODUS PONENS})$$

La regola non è invertibile per esempio quando $F_2 = \top$ e $F_1 = \bot$. Rimane non invertibile anche sapendo che $F_1 \Rightarrow F_2$ valga.

Nota: durante la ricerca top-down della prova la regola di modus ponens è la più difficile da applicare in quanto F_1 non è in genere noto e, anche in presenza di una prova per $F_1 \Rightarrow F_2$, F_1 può non essere dimostrabile.

Deduzione naturale: $\Rightarrow$

In Matita la sintassi

$$\texttt{by}\ H_1, \ldots, H_n\ \texttt{we proved}\ F$$

applica un numero arbitrario di passi di modus ponens ($\Rightarrow_e$) ramificati in maniera arbitraria; i rami terminano con le ipotesi (scaricate o meno) etichettate con $H_1, \ldots, H_n$.

Ovvero: un singolo comando `by` nasconde (sotto-)prove di complessità arbitraria.

Deduzione naturale: ricerca delle prove

Esercizi (esempi alla lavagna):

- $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$
- $\vdash (A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D) \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow D$
- $\vdash (A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow C \wedge D) \Rightarrow (B \Rightarrow D) \Rightarrow D \wedge (B \vee C)$

Il $\neg$ come connettivo derivato

In logica classica

$$\neg F \equiv (F \Rightarrow \bot)$$

Infatti in logica classica l'implicazione è vera sse

1. la conclusione $\bot$ è vera (in nessun mondo)
2. la premessa F è falsa (o equivalentemente $\neg F$ è vera)

Pertanto possiamo derivare le regole del $\neg$ come caso speciale di quelle del $\Rightarrow$.

Deduzione naturale: $\neg$

Definiamo $\neg F_1$ come $F_1 \Rightarrow \bot$ per ottenere le regole per il $\neg$ come istanze delle regole per l'$\Rightarrow$.

Regole di introduzione:

$$\dfrac{\begin{matrix}[F_1]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg F_1}\ (\neg_i)$$

Lettura bottom-up: se ipotizzando F_1 dimostro l'assurdo allora $\neg F_1$.

Lettura top-down: per dimostrare $\neg F_1$ basta assumere F_1 e dimostrare l'assurdo.

Scrittura informale:	In Matita:
	we need to prove $\neg F_1$ or equivalently $F_1 \Rightarrow \bot$
supponiamo F_1	suppose F_1 (H)
... assurdo	... we proved False
e quindi $\neg F_1$	

Deduzione naturale: $\neg$

Ricordiamoci che $\neg F_1 \equiv F_1 \Rightarrow \bot$ per ottenere le regole per il $\neg$ come istanze delle regole per l'$\Rightarrow$.

Regole di eliminazione:

$$\frac{\neg F_1 \quad F_1}{\bot} \qquad (\neg_e)$$

Lettura bottom-up: è assurdo avere sia $\neg F_1$ che F_1

Lettura top-down: per dimostrare l'assurdo basta dimostrare qualcosa e il suo contrario.

Scrittura informale:	In Matita:
... e quindi $\neg F_1$	... we proved $\neg F_1$ or equivalently $F_1 \Rightarrow$ False (H_1)
... e quindi F_1	... we proved F_1 (H_2)
assurdo!	by H_1, H_2 we proved False

Deduzione naturale: $\neg$

Invertibilità per l'$\neg_i$: segue da quella della regola dell'$\Rightarrow_i$.

Inoltre, QUANDO CI SI TROVA A DIMOSTRARE IL $\perp$, DA QUEL MOMENTO IN AVANTI TUTTE LE REGOLE APPLICABILI SONO INVERTIBILI in quanto la conclusione $\perp$ ha come conseguenza logica qualunque formula. In ogni momento, dopo aver accumulato nuove ipotesi e quando si è bloccati, È POSSIBILE TORNARE A DIMOSTRARE $\perp$ PER MEZZO DELLA REGOLA $\perp_e$. Infine l'intuizione diventa spesso inutile/fuorviante (le ipotesi sono inconsistenti).

Invertibilità per l'$\neg_e$: ovvia in quanto $\perp \vdash F_1$ e $\perp \vdash \neg F_1$. La regola è comunque di difficile applicazione in quanto se non si sceglie l'F_1 giusto, si è solo duplicato il lavoro inutilmente.

Obiettivi

Abbiamo introdotto la semantica e la deduzione naturale per la logica proposizionale classica.

Vogliamo dimostrare i seguenti due teoremi:

1. Correttezza:
$$\forall \Gamma, F. \Gamma \vdash F \Rightarrow \Gamma \Vdash F$$
2. Completezza (forte):
$$\forall \Gamma, F. \Gamma \Vdash F \Rightarrow \Gamma \vdash F$$

Intuizione: teorema di correttezza

Teorema di correttezza: $\forall \Gamma, F. \Gamma \vdash F \Rightarrow \Gamma \Vdash F$

Intuizione: tutte le regole che ho dato sono corrette

Esempio: se aggiungo la regola errata $\frac{A}{A \wedge B}$ posso dimostrare $\top \vdash \bot$, mentre $\top \nVdash \bot$

Far valere la correttezza è facile: basta non introdurre regole (localmente) scorrette.

Intuizione: teorema di completezza

Teorema di completezza: $\forall \Gamma, F. \Gamma \Vdash F \Rightarrow \Gamma \vdash F$

Intuizione: ho aggiunto tutte le regole che mi servono per catturare sintatticamente un concetto semantico

Esempio: se dimentico la regola $\frac{A \quad B}{A \wedge B}$ non posso più dimostrare $A \Vdash A \wedge A$

La completezza vale solo per logiche semplici, dove il concetto semantico da catturare non è troppo complesso.

La logica del prim'ordine è l'ultima logica per complessità in cui

Teorema di correttezza per la logica classica/intuizionista

Teorema di correttezza per la logica classica/intuizionista: se $\Gamma \vdash F$ (usando solo regole localmente corrette per la logica classica/intuizionista) allora $\Gamma \Vdash F$ in logica classica/intuizionista.

Dimostrazione: per induzione strutturale sull'albero di derivazione $\Gamma \vdash F$.

Caso A: poichè A è una foglia non cancellata, si ha $A \in \Gamma$. Pertanto $\Gamma \Vdash A$.

Caso $[A]$: impossibile in quanto un'ipotesi viene scaricata solamente da una regola.

Teorema di correttezza per la logica classica/intuizionista

Caso $\frac{T_1 \ldots T_n}{F}$ (r) dove $T_1, \ldots, T_n$ sono i sottoalberi immediati dell'albero di deduzione:
Sia T_i la derivazione $\Theta_i \vdash F_i$. Si ha $\Theta_i = \Gamma_i \cup \Delta_i$ dove Δ_i è l'insieme delle ipotesi cancellate in T_i dalla regola r, Γ_i è l'insieme delle ipotesi non cancellate dalla regola r e $\Gamma \supseteq \bigcup_i \Gamma_i$.
Per ipotesi induttiva, $\Theta_i = \Gamma_i \cup \Delta_i \Vdash F_i$ per ogni i. Per correttezza locale della regola r si ha $\Delta_1 \Rightarrow F_1, \ldots, \Delta_n \Rightarrow F_n \Vdash F$. Per il teorema di deduzione semantica (dimostrazione rimandata), da $\Delta_i \cup \Gamma_i \Vdash F_i$ consegue che $\Gamma_i \Vdash \Delta_i \Rightarrow F_i$. Quindi per la transitività della conseguenza semantica, si ottiene $\Gamma \supseteq \bigcup_i \Gamma_i \Vdash F$.

QED.

Fallimento della completezza per la logica classica

Classicamente le seguenti sono tautologie:

1. $\Vdash \neg\neg A \Rightarrow A$ ragionamento per assurdo (RAA)
2. $\Vdash A \vee \neg A$ terzo escluso (Excluded Middle, EM)

È facile convincersi che

1. $\nvdash \neg\neg A \Rightarrow A$
2. $\nvdash A \vee \neg A$

Pertanto, le regole date finora non rendono il sistema completo per la logica proposizionale classica.

E quindi?

Piano di azione:

1. Trovare quali regole aggiuntive servono per rendere il sistema completo per la logica proposizionale classica (risposta: aggiungiamo la regola RAA)
2. Chiedersi se esiste una seconda semantica, non classica, per la quale l'insieme di regole date finora sia completo (risposta: la logica intuizionista)

Deduzione naturale: *RAA*

ATTENZIONE: non confondere la regola $\neg_i$ con la regola di dimostrazione per assurdo (RAA) che dice qualcosa di diverso:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[F]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg F}\ (\neg_i) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg F]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{F}\ (RAA)$$

Infatti la regola $\neg_i$ istanziata con $\neg F$ dice solo

$$\dfrac{\begin{array}{c}\neg F\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\neg F}\ (\neg_i)$$

e $\neg\neg F \equiv F$ solamente classicamente ma non intuizionisticamente.

Deduzione naturale: $\neg$

Nota: la confusione fra $\neg_i$ e RAA è molto frequente presso i matematici e accentua in loro l'impressione che facendo logica intuizionista (ove la RAA non vale) non si riesca a dimostrare quasi nulla.

In verità la $\neg_i$ vale intuizionisticamente e, anzi, sulle proposizioni negate (non informative) sappiamo che le due logiche essenzialmente coincidono.

Deduzione naturale: *RAA*

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg F]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{F}\ (RAA)$$

Lettura bottom-up: Assumiamo per assurdo $\neg F$. ... Assurdo! Quindi F.

Lettura top-down: Per dimostrare F procediamo per assurdo assumendo $\neg F$ e dimostrando $\bot$.

Deduzione naturale: *RAA*

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg F] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{F}\ (RAA)$$

Correttezza classica: da $\neg F \Rightarrow \bot \Vdash F$. Infatti sia v tale che $[\![\neg F \Rightarrow \bot]\!]^v = \max\{1 - [\![\neg F]\!]^v, [\![\bot]\!]^v\} = \max\{1 - (1 - [\![F]\!]^v), 0\} = [\![F]\!]^v = 1$. Si ha $[\![F]\!]^v = 1$.

Invertibilità classica: $F \Vdash \neg F \Rightarrow \bot$ in quanto in tutti i mondi v in cui $[\![F]\!]^v = 1$ si ha $[\![\neg F \Rightarrow \bot]\!]^v = \max\{1 - [\![\neg F]\!]^v, [\![\bot]\!]^v\} = \max\{1 - (1 - [\![F]\!]^v), 0\} = 1$.

Deduzione naturale per la logica classica: RAA

Un uso frequente della RAA è il seguente schema

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg A] \\ \vdots \\ A\end{matrix} \qquad [\neg A]}{\bot}\,(\neg_e)}{A}\,(RAA)$$

Ovvero, per trovare una prova di A ci si riduce a cercare ancora una prova di A, ma dopo aver assunto $\neg A$.

Esercizio: dimostrare $\vdash (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$.

Deduzione naturale per la logica classica: EM

Il principio del terzo escluso (EM) è dimostrabile a partire dalla RAA:

Esercizio: $\vdash A \vee \neg A$

In generale le dimostrazioni classiche effettuate con il solo ausilio della RAA possono essere laboriose e/o anti-intuitive.

Tuttavia il principio del terzo escluso combinato con l'eliminazione dell'or fornisce uno schema di prova molto potente (analisi per casi su una variabile).

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ A \vee \neg A\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A] \\ \vdots \\ F\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg A] \\ \vdots \\ F\end{array}}{F}\ (\vee_e)$$

Deduzione naturale classica vs intuizionista

Vedremo che le dimostrazioni intuizioniste sono sempre migliori (più informative) di quelle classiche.

preferire sempre una prova intuizionista a una classica, se possibile

Inoltre le prove intuizioniste sono anche più semplici.