

Linguaggi

14: Sistemi Deduttivi

Claudio Sacerdoti Coen

`<sacerdot@cs.unibo.it>`

Università di Bologna

20/11/2017

$$\Gamma \Vdash F \iff \forall v, (\forall G \in \Gamma, \llbracket G \rrbracket^v = 1) \Rightarrow \llbracket F \rrbracket^v = 1$$

- Abbiamo definito in maniera **computazionale** la **sintassi** della logica proposizionale (via BNF) e la funzione di **interpretazione semantica** (per ricorsione strutturale)
- Abbiamo definito in maniera **NON COMPUTAZIONALE** la nozione di deduzione semantica
 - Non abbiamo usato ricorsione strutturale
 - La definizione quantifica su tutti gli infiniti mondi

Sulla conseguenza logica (2/2)

$$\Gamma \Vdash F \iff \forall v, (\forall G \in \Gamma, \llbracket G \rrbracket^v = 1) \Rightarrow \llbracket F \rrbracket^v = 1$$

- Non vi è alcun algoritmo per determinare se $\Gamma \Vdash F$ quando Γ è infinito
- Quando Γ è finito possiamo costruire **tabelle di verità**, ma
 - 1 Poco interessante: **solo** per la logica proposizionale classica
 - 2 Richiede un tempo **esponenziale** nella dimensione delle formule
 - 3 Nessuno dimostra/convince in questo modo

Vogliamo introdurre una nuova nozione **sintattica**

$$\Gamma \vdash F$$

(leggi: dalle **ipotesi** Γ **deduco** la **conclusione** F) tale che:

- 1 $\Gamma \vdash F$ quando ho una **prova esplicita** (in una qualche **sintassi**) del fatto che F “segua logicamente” da Γ
- 2 **Correttezza**: se $\Gamma \vdash F$ allora $\Gamma \Vdash F$
“posso dimostrare solo le conseguenze logiche”
- 3 ci sia un algoritmo in grado di **verificare efficientemente** la correttezza della prova (p.e. Matita)

$$\Gamma \vdash F$$

Idealmente:

- 1 Vogliamo introdurre la sintassi delle prove tramite BNF per
 - 1 poter definire funzioni ricorsive strutturali su prove
 - 2 poter ragionare per induzione strutturale su prove
- 2 Vorremmo che valga la **completezza**:

$$\forall \Gamma, F. \quad \Gamma \Vdash F \rightarrow \Gamma \vdash F$$

“tutte le conseguenze logiche sono dimostrabili”

$$\Gamma \vdash F$$

In pratica:

- 1 useremo una notazione **bi/tri-dimensionale** per le prove
 - la penseremo come una BNF ...
 - ... ma la introdurremo informalmente per essere più flessibili
- 2 la **completezza NON vale** per logiche **espressive** (p.e. logiche classiche del secondo ordine, del terzo ordine, etc.)
- 3 tuttavia **varrà** (anche se in maniera **non algoritmica**) per la **logica proposizionale** e per la **logica del prim'ordine** che vedremo in questo corso

$$\Gamma \vdash F$$

Ci sono **tanti sistemi deduttivi** differenti

- = **sintassi diverse** per le dimostrazioni

Esempio: 4 sistemi deduttivi nel libro Asperti-Ciabattoni

- rispondono a **esigenze diverse**, p.e.
 - semplificare la costruzione e la comunicazione di prove da parte di un umano
 - velocizzare la ricerca automatica di dimostrazioni
 - minimizzare la taglia della sintassi per accorciare le meta-dimostrazioni
 - ...

Ne studiamo solo uno: la **deduzione naturale** orientata alla presentazione delle prove ad un umano

Da ora in avanti **il nostro oggetto di studio saranno le prove:**

- introdurremo una **sintassi formale** per le prove in deduzione naturale
- studieremo le loro proprietà usando **meta-dimostrazioni** in una **meta-logica**
- le prove in deduzione naturale saranno **estremamente verbose** non omettendo nessun dettaglio

Attenzione a non confondere

- formule con meta-formule
es. $\exists \text{And}$ vs \wedge in Matita
- prove con meta-prove

Dopo aver definito la sintassi

- 1 studieremo la **pragmatica** (= come si fanno le prove) della deduzione naturale
- 2 dimostreremo i teoremi di **correttezza** e **completezza**

Dallo studio all'applicazione

- 1 continuerete nel resto dei vostri studi a scrivere le prove **informalmente**, **omettendo i dettagli** non interessanti
- 2 tuttavia una prova è corretta solo se siete in grado di **esplicitarla** in una prova in deduzione naturale
- 3 numerose **applicazioni informatiche**: per esempio un **compilatore** per capire se un programma è **ben tipato** costruisce prove in deduzione naturale