

# Logica

## 2: Verità e conseguenza logica

**Claudio Sacerdoti Coen**

`<sacerdot@cs.unibo.it>`

Università di Bologna

08/11/2019

# Outline

## 1 Verità e conseguenza logica

# Verità

Wikipedia: “Col termine **verità** si indicano una varietà di significati, che esprimono un senso di accordo con la **realtà**, e sono in genere collegati col concetto di onestà, buona fede e sincerità.

Verità fisiche, chimiche, . . . associate al **mondo sensibile**.

Un esperimento **ripetibile** definisce una verità.

Verità **parametrica** rispetto a **cambiamenti del mondo sensibile**.

Verità assolute associate ad aspetti immodificabili.

*Cosa resta della verità quando manca il mondo sensibile?  
(matematica, informatica)*

# Verità vs ragionamento ipotetico

Supponete di stare leggendo un libro di fantascienza

- leggendo il libro scoprite le leggi fisiche che **si suppone** valgano
- in base a quelle siete in grado di affermare che **in tale mondo** certi eventi accadano (siano vere) e altre no
- le leggi fisiche descritte individuano **una molteplicità di mondi fantastici**: non descrivono interamente l'intero funzionamento del mondo
- pertanto ci saranno eventi dei quali non saprete dire se accadano o no
- una descrizione completa del mondo dovrebbe dirci per ogni evento se esso accade o meno

# Verità in matematica

Una **teoria matematica** è come un libro di fantascienza

- gli **assiomi** sono come le leggi fisiche: ci dicono tutto quello che **supponiamo** valere **nei mondi** sotto considerazione
- un **modello matematico** della teoria è **un qualunque mondo** in cui interpretare i concetti matematici primitivi in modo tale che ogni assioma della teoria valga
- un **mondo** è una descrizione completa che determina un concetto di verità; gli assiomi tuttavia individuano **una molteplicità di mondi** (tutti i modelli della teoria)
- data una **proposizione**, essa potrebbe essere sicuramente vera in ogni modello di una teoria, sicuramente falsa o non determinata (a volte vera, a volte falsa)

# Teorie, modelli, verità: esempi

Esempio di teoria:

- Enti primitivi:  $0, \leq$
- Assomi:  $\leq$  ha le proprietà riflessiva, antisimmetrica, transitiva e  $\forall n, 0 \leq n$

Esempio di proposizioni:

- 1  $\forall x. x \leq 0 \Rightarrow x = 0$
- 2  $\forall x, y. x \leq y \vee y \leq x$

Modello 1:

- interpreto gli oggetti come numeri naturali
- 0 come numero 0
- $\leq$  come  $\leq$  sui naturali
- tutti gli assiomi sono soddisfatti
- entrambe le proposizioni sono vere

Modello 2:

- interpreto gli oggetti come numeri naturali
- 0 come numero 1
- $\leq$  come "divide"
- tutti gli assiomi sono soddisfatti
- solo la prima proposizione è vera

È possibile trovare un modello della teoria in cui la prima proposizione sia falsa?

# Dalla verità alla conseguenza logica

Data una teoria e una proposizione

- **Non ha senso chiedersi se la proposizione sia vera o falsa** non sappiamo in quale mondo valutarla; non abbiamo un mondo (sensibile o meno) di riferimento
- **Ha senso chiedersi se sia vera in ogni modello della teoria**
  - gli assiomi della teoria sono **filtri** sulla totalità dei mondi;
  - restringendo l'insieme dei mondi sotto esame certe proposizioni assumono lo stesso valore di verità in tutti i mondi
- In tal caso diciamo che la proposizione è **conseguenza logica** degli assiomi

# Conseguenza logica

Sia  $\Gamma = F_1, \dots, F_n$  un insieme di sentenze e sia  $F$  una proposizione.

$F$  è *conseguenza logica* di  $\Gamma$  ( $\Gamma \Vdash F$ ) quando  $F$  è vera in tutti i modelli di  $\Gamma$ , ovvero in tutti i mondi in cui ognuna delle  $F_i$  è vera



# Conseguenza logica

Intuizioni per  $\Gamma \Vdash F$ :

- Le sentenze in  $\Gamma$  costituiscono dei **vincoli** che i mondi debbono rispettare
- $\Gamma \Vdash F$  quando i vincoli sono **sufficienti** a garantire che  $F$  sia una verità in tutti i mondi che soddisfano i vincoli
- **Più** sono i **vincoli**, potenzialmente **meno** sono i **mondi** che li soddisfano, potenzialmente **più** sono le **conseguenze logiche** dei vincoli

Altra intuizione:

- Se  $\Gamma \Vdash F$  allora la “verità” di  $F$  (l’insieme dei mondi in cui  $F$  è vera) è già inclusa (è un sovrainsieme di) nella “verità” di  $\Gamma$  (l’insieme dei mondi in cui le formule di  $\Gamma$  sono vere)

# Equivalenza logica

Siano  $F$  e  $G$  due sentenze.

$F$  è logicamente equivalente a  $G$  ( $F \equiv G$ ) sse  $F \Vdash G$  e  $G \Vdash F$

Equivalentemente:  $F \equiv G$  sse  $F$  e  $G$  sono soddisfatte dagli stessi mondi.

Teorema: l'equivalenza logica è una relazione di equivalenza

Dimostrazione:

$F \equiv F$  in quanto in ogni mondo, se  $F$  è vera allora  $F$  è vera

se  $F \equiv G$  allora  $G \equiv F$ : perchè?

se  $F \equiv G$  e  $G \equiv H$  allora  $F \equiv H$ : perchè?

## Quando una teoria è interessante? (1/2)

Se le teorie descrivono insiemi di mondi, esse non sono mai “vere” o “false”, “giuste” o “sbagliate” (rispetto a cosa?)

Una teoria è **inconsistente** quando non ammette modelli, ovvero in nessun mondo tutti gli assiomi sono contemporaneamente veri.

Esempio:  $0 = 1, 0 \neq 1, \forall x.x = x$  è una teoria inconsistente

Fatto ovvio: se  $\Gamma$  è inconsistente allora per ogni  $F$  si ha  $\Gamma \Vdash F$

Dimostrazione:  $F$  deve valere nell'insieme vuoto di modelli, il che è vero

Corollario: **se  $\Gamma$  è inconsistente allora  $\Gamma \Vdash \perp$**  dove  $\perp$  è una proposizione falsa (anche chiamata assurdo)

## Quando una teoria è interessante? (2/2)

Un teorema complesso (che non dimostreremo) dice che è vero anche il contrario:

**Teorema: se  $\Gamma \Vdash \perp$  allora  $\Gamma$  è inconsistente, ovvero non ha modelli.**

Tutte le teorie consistenti (= non inconsistenti, in cui l'assurdo non è conseguenza logica) sono interessanti: esse hanno almeno un modello in cui tutte le conseguenze logiche di  $\Gamma$  sono vere.

**Fare matematica = studiare le conseguenze logiche di un insieme di assiomi (= studiarne la teoria)**

Una teoria è tanto più interessante di altre quanto più le sue conseguenze logiche sono utili una volta applicate ad altri campi (p.e. fisica, meteorologia, informatica, . . .), ma le applicazioni potrebbero essere scoperte solo diversi secoli dopo (p.e. la teoria dei numeri è alla base della crittografia)

# Conclusioni

- La verità di una sentenza è sempre definita rispetto a:
  - 1 un mondo
  - 2 l'interpretazione degli enti primitivi nel mondo
- Normalmente, il valore di verità di una sola sentenza non è interessante: varia al variare del mondo
- Conseguenza logica:  $\Gamma \Vdash F$  quando in ogni mondo che rende vere tutte le sentenze di  $\Gamma$  anche  $F$  è necessariamente vera
- Equivalenza logica: chiusura simmetrica della conseguenza logica