| Come scrivere i simboli | Teoremi e assiomi |
|---|---|
| ∈ \mem<br>⊆ \subseteq<br>∅ \emptyset<br>∨ \or<br>∧ \wedge<br>∩ \cap<br>∪ \cup<br>∀ \forall<br>℘ \wp<br>↔ \iff<br>→ \to<br>₁ \1<br>₂ \2 | `def A ⊆ B := ∀ Z, Z ∈ A → Z ∈ B`<br>`axiom ax_extensionality1: ∀A B, (∀Z, Z ∈ A ↔ Z ∈ B) → A = B`<br>`axiom ax_extensionality2: ∀A B, A = B → (∀Z, Z ∈ A ↔ Z ∈ B)`<br><br>`axiom ax_empty: ∀X, (X ∈ ∅)→ False`<br>`axiom ax_intersect1: ∀A B, ∀Z, (Z ∈ A ∩ B → Z ∈ A ∧ Z ∈ B)`<br>`axiom ax_intersect2: ∀A B, ∀Z, (Z ∈ A ∧ Z ∈ B → Z ∈ A ∩ B)`<br>`axiom ax_union1: ∀A B, ∀Z, (Z ∈ A ∪ B → Z ∈ A ∨ Z ∈ B)`<br>`axiom ax_union2: ∀A B, ∀Z, (Z ∈ A ∨ Z ∈ B → Z ∈ A ∪ B)`<br><br>`axiom ax_powerset1: ∀A, ∀Z, (Z ∈ ℘ A → Z ⊆ A)`<br>`axiom ax_powerset2: ∀A, ∀Z, (Z ⊆ A → Z ∈ ℘ A)`<br>`axiom ax_big_union1 : x ∈ ∪ F → ∃ y, y ∈ F ∧ x ∈ y`<br>`axiom ax_big_union2 : (∃ y, y ∈ F ∧ x ∈ y) → x ∈ ∪ F`<br><br>**Laboratorio 07 Ottobre**<br>`theorem reflexivity_inclusion: ∀A, A ⊆ A`<br>`theorem transitivity_inclusion: ∀A B C, A ⊆ B → B ⊆ C → A ⊆ C`<br>`theorem subset_to_eq: ∀A B, A ⊆ B → B ⊆ A → A = B`<br>`theorem eq_to_subset1: ∀A B, A = B → A ⊆ B`<br>`theorem eq_to_subset2: ∀A B, A=B → B⊆A`<br>`theorem transitivity_equality: ∀(A : set) B C, A=B → B=C → A=C`<br><br>**Laboratorio 14 Ottobre**<br>`theorem emptyset_is_subset: ∀A, ∅ ⊆ A`<br>`theorem intersection_idempotent: ∀A, A ∩ A = A`<br>`theorem intersect_empty: ∀A, A ∩ ∅ = ∅`<br>`theorem subseteq_emptyset: ∀X, X ⊆ ∅ → X = ∅`<br>`theorem intersect_commutative_aux: ∀A B, A ∩ B ⊆ B ∩ A`<br>`theorem intersect_commutative: ∀A B, A ∩ B = B ∩ A`<br>`theorem union_symmetric: ∀A B, A ∪ B = B ∪ A`<br>`theorem intersect_monotone: ∀A B A' B', A ⊆ A' → B ⊆ B' → A ∩ B ⊆ A' ∩ B'`<br>`theorem union_emptyset: ∀A, A ∪ ∅ = A`<br>`theorem intersect_is_subset: ∀A B, A ∩ B ⊆ A`<br>`theorem intersect_union₁: ∀A B C, A ∩ (B ∪ C) ⊆ A ∩ B ∪ A ∩ C`<br><br>**Laboratorio 21 Ottobre**<br>`theorem exists_member_subset: ∀A B, A ⊆ B → (∃X, X ∈ A) → (∃Y, Y ∈ B)`<br>`theorem exists_subset₁: ∀A, ∃B, B ⊆ A`<br>`theorem full_in_monotone: ∀A, A ∈ ℘ A`<br>`theorem exists_subset₂: ∀A, ∃B, B ⊆ A`<br>`theorem bigunion_comm1 : ∀ F₁ F₂, (∪ F₁) ∪ (∪ F₂) ⊆ ∪ (F₁ ∪ F₂)`<br>`theorem powerset_monotone₁: ∀A B, A ⊆ B → ℘ A ⊆ ℘ B`<br>`theorem from_union_inhabited: ∀A B, (∃X, X ∈ A ∪ B) → ∃Y, Y ∈ A ∨ Y ∈ B`<br>`theorem powerset_monotone₂: ∀A B, ℘ A ⊆ ℘ B → A ⊆ B`<br>`theorem subset_intersection₁: ∀A B Z, Z ⊆ A ∩ B → Z ⊆ A ∧ Z ⊆ B`<br>`theorem powerset_intersection₁: ∀A B, ℘ (A ∩ B) ⊆ ℘ A ∩ ℘ B`<br>`theorem subset_intersection₂: ∀A B Z, Z ⊆ A → Z ⊆ B → Z ⊆ A ∩ B`<br>`theorem powerset_intersection₂: ∀A B, ℘ A ∩ ℘ B ⊆ ℘ (A ∩ B)`<br>`theorem bigunion_comm2_aux : ∀ A B C, B ∈ C → A ∈ B → A ∈ ∪ C`<br>`theorem bigunion_comm2 : ∀ F₁ F₂, ∪ (F₁ ∪ F₂) ⊆ (∪ F₁) ∪ (∪ F₂)`<br>`theorem bigunion_commutes_with_union : ∀ F₁ F₂, (∪ F₁) ∪ (∪ F₂) = ∪ (F₁ ∪ F₂)` |

# Sintassi linguaggio dichiarativo

- `assume A: set`
  $\forall$-introduzione usato per dimostrare $\forall A, P$. La conclusione diventa $P$.
- `suppose P as H`
  $\rightarrow$-introduzione usato per dimostrare $P \rightarrow Q$; la conclusione diventa $Q$. Si ha una nuova ipotesi $P$ di nome $H$; dopo $P$ è possibile specificare "`that is equivalent to R`" per espandere le definizioni contenute in $P$: in tal caso la nuova ipotesi ha la forma $R$ e non più $P$. "`as H`" può essere omesso: in tal caso si può usare l'ipotesi solo al passo successivo con `thus`.
- `we split the proof`
  $\leftrightarrow$-introduzione usato per dimostare $P \leftrightarrow Q$; bisogna aprire due sottoprove: la prima di $P \rightarrow Q$, e la seconda di $Q \rightarrow P$. Le due sottoprove iniziano con . e sono indentate.

  $\wedge$-introduzione usato per dimostrare $P \wedge Q$; bisogna aprire due sottoprove: la prima di $P$ e, la seconda di $Q$. Le due sottoprove iniziano con `.` e sono indentate.
- `we need to prove P`
  esplicita cosa si sta dimostrando. Non corrisponde a un passo logico; può essere seguito da "`that is equivalent to Q`" per espandere le definizioni contenute in $P$.
- `by H it suffices to prove P`
  $\forall$-eliminazione + $\rightarrow$-eliminazione; forma alternativa di $\forall$-eliminazione + $\rightarrow$-eliminazione si usa quando la conclusione corrente è $Q$ e quando $H$, dopo l'applicazione di zero o più $\forall$-eliminazioni, ha la forma $P \rightarrow Q$. La nuova conclusione da dimostrare diventa $P$.
- `we proceed by cases on H to prove P`
  $\vee$-eliminazione, usato in presenza di un'ipotesi $H$ della forma $Q \vee R$. Bisogna aprire due sottoprove: la prima in cui si dimostra $P$ sotto l'ipotesi che $Q$ valga, la seconda in cui si dimostra ancora $P$, ma sotto l'ipotesi che valga $R$. Le due sottoprove iniziano con . e sono indentate. Dopo il . bisogna utilizzare il comando "`case`" per dare un nome all'ipotesi, come segue

  ```
  . case left (H1: Q)
  ...
  . case right (H2: R)
  ...
  ```

  dove `H1,H2` sono i nomi scelti per le due ipotesi $Q$ ed $R$.
- `we choose E and prove P` $\exists$-introduzione, usato per dimostrare $\exists X, Q$. $E$ è un'espressione scelta come specifico $X$ che si vuole dimostrare avere la proprietà $P$. $Q$ è la proprietà da dimostrare, ottenuta a partire da $P$ sostituendo $E$ al posto di $X$.
- `by H1, ..., Hn done`
  $\forall$-eliminazione + $\rightarrow$-eliminazione + $\leftrightarrow$-eliminazione + $\wedge$-introduzione + $\perp$-eliminazione. Si dimostra la conclusione del teorema combinando assieme le $n$ ipotesi tramite un numero arbitrario di applicazione delle regole elencate subito sopra e ri-spiegate qua sotto. Si può usare `thus` prima di `by` per aggiugere l'ultima ipotesi introdotta, anonima o meno.
  La dimostrazione (o la sotto-dimostrazione) è conclusa.

  $\forall$-eliminazione: da un'ipotesi $\forall x, P$ si ottiene $P$ in un caso specifico, ottenuto sostituendo a $x$ qualcosa.
  Esempio: da $\forall A, \varnothing \subseteq A$ si può ricavare $\varnothing \subseteq \varnothing$ sostituendo ad $A$ l'insieme vuoto $\varnothing$.

  $\rightarrow$-eliminazione: da un'ipotesi $P \rightarrow Q$ e da un'ipotesi $P$ si ricava $Q$.

  $\leftrightarrow$-eliminazione: da un'ipotesi $P \leftrightarrow Q$ si ricava sia $P \rightarrow Q$ che $Q \rightarrow P$.

  $\wedge$-introduzione: da un'ipotesi $P$ e da un'ipotesi $Q$ si ricava $P \wedge Q$.

  $\perp$-eliminazione: da un'ipotesi `False` si ricava qualunque cosa.
- `by H1, ..., Hn we proved P as H`
  come il caso precedente, ma invece di dimostrare la conclusione si ricava una nuova ipotesi $P$ alla quale viene data il nome $H$. Dopo $P$ è possibile specificare "`that is equivalent to R`" per espandere le definizioni contenute in $P$: in tal caso la nuova ipotesi ha la forma $R$ e non più $P$. "`as H`" può essere omesso: in tal caso si può usare l'ipotesi solo al passo successivo con `thus`. La conclusione da dimostrare non cambia.
- `by H1, ..., Hn we proved P as K₁ and Q as K₂`
  come il caso precedente, ma invece di concludere $P \wedge Q$ si applica un passo di $\wedge$-eliminazione concludendo separatamente sia $P$ che $Q$. Alle due conclusioni vengono date i nomi indicati.
- `by H1, ..., Hn let X: set such that P as H`
  come il caso precedente, ma invece di concludere `∃X, P` si applica un passo di $\exists$-eliminazione fissando un nuovo insieme generico $X$ e supponendo che valga l'ipotesi $P$ dando come nome all'ipotesi $H$.