

1. Si dia la definizione di conseguenza logica ( $\models$ ) nel caso predicativo. Quale relazione sussiste tra le relazioni  $\models$  e  $\vdash$  ?
2. Si consideri il linguaggio sui simboli di funzione  $\{0, succ, +, *\}$  e di predicato  $\{=\}$ . Supponendo che questi simboli di funzione e di predicato siano interpretati col loro significato standard sul dominio dei numeri naturali, si dia la definizione di un predicato  $P(x, y)$  che esprima la seguente frase “ $x$  e  $y$  hanno un divisore dispari in comune”. (Si possono usare meta-definizioni ausiliarie).
3. Usando il calcolo della deduzione naturale si dimostri la seguente conseguenza logica:

$$\forall x[A(f(x)) \rightarrow B(f(x))], \forall x[A(x) \vee \exists zB(z)] \models \exists yB(y).$$

4. Si dimostri per risoluzione la conseguenza logica dell'esercizio precedente.
5. È data la formula:

$$P = \forall x(A(x) \rightarrow \exists y(y \neq x \wedge B(x, y))) \wedge \exists yA(y).$$

La formula  $P$  è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se  $P$  è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula  $\neg P$ . Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui  $P$  è vera che una in cui  $P$  è falsa.