Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 6 settembre 2007
Tempo a disposizione: ore 2:00.

1. Si consideri il linguaggio del prim'ordine con un solo simbolo di funzione binaria f (non ci sono costanti). Dato un termine t di questo linguaggio, indichiamo con $\#_v[t]$ il numero delle occorrenze di variabili in t (ad esempio, $\#_v[f(x, f(y, y))] = 3$); indichiamo invece con $\#_f[t]$ il numero delle occorrenze del simbolo f in t (ad esempio, $\#_f[f(x, f(y, y))] = 2$). Si dimostri che, per ogni termine t, $\#_v[t] \geq \#_f[t] + 1$.

2. Si consideri il linguaggio sui simboli di funzione $\{0, succ, +, *\}$ e di predicato $\{=\}$. Supponendo che questi simboli di funzione e di predicato siano interpretati col loro significato standard sul dominio dei numeri naturali, si dia la definizione di un predicato $P(x)$ che esprima la seguente frase "x ha un divisore dispari". (Si possono usare meta-definizioni ausiliarie).

3. Usando il calcolo della deduzione naturale si dimostri la seguente conseguenza logica (il simbolo c è una costante):
$$\forall x[A(x) \to B(f(x))], \forall x[B(x) \to B(f(x))] \models \forall x(A(x) \vee B(x)) \to \exists y B(f(f(y))).$$

4. Si dimostri per risoluzione la conseguenza logica dell'esercizio precedente.

5. È data la formula:
$$P = [\exists x A(x) \to \forall x B(x)] \to \forall x(A(x) \to B(x)).$$
La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.