

1. (i) Sia la definizione di insieme consistente massimale.
- (ii) Sia v una valutazione proposizionale (cioè un assegnamento di valori di verità agli atomi proposizionali) e si definisca il seguente insieme di formule proposizionali

$$\Gamma_v = \{P \mid \llbracket P \rrbracket^v = True\}.$$

Si dimostri che Γ_v è consistente massimale (si usi il teorema di completezza per la consistenza).

2. Si consideri il linguaggio sui simboli di funzione $\{0, succ, +, *\}$ e di predicato $\{=\}$. Supponendo che questi simboli di funzione e di predicato siano interpretati col loro significato standard sul dominio dei numeri naturali, si dia la definizione di un predicato $P(x)$ che esprima la seguente frase “ x è un numero che ha almeno tre divisori distinti”. (Si possono usare meta-definizioni ausiliarie).
3. Usando il calcolo della deduzione naturale si dimostri la seguente conseguenza logica (il simbolo c è una costante):

$$\forall x \exists y [A(x) \rightarrow B(f(y))], A(c) \models \exists x B(x).$$

4. Si dimostri per risoluzione la conseguenza logica dell’esercizio precedente.
5. È data la formula:

$$P = [\forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)] \rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$

La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un’interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.