Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 31 maggio 2007
Tempo a disposizione: ore 2:00.

1. (i) Si dia la definizione conseguenza logica *nel caso predicativo.*

   (ii) Si consideri la classe di formule predicative costruite usando soltanto le due variabili x, y, un singolo predicato unario A, i connettivi $\wedge$ e $\vee$ (non ci sono quantificatori, né termini diversi dalle variabili x, y). Si dimostri per induzione che, per ogni formula P di tale classe, vale $A(x), A(y) \models P$.

2. Si consideri il linguaggio sui simboli di funzione $\{0, succ, +, *\}$ e di predicato $\{=\}$. Supponendo che questi simboli di funzione e di predicato siano interpretati col loro significato standard sul dominio dei numeri naturali, si dia la definizione di un predicato $P(y, z)$ che esprima la seguente frase "z è dispari e minore di y". (Si possono usare meta-definizioni ausiliarie; si osservi che $<$ *non* fa parte del linguaggio).

3. Usando il calcolo della deduzione naturale si dimostri la seguente conseguenza logica:

$$\forall x[A(x) \to \exists y C(x, f(y))], \exists x[A(x) \vee B(x)], \forall x[B(x) \to \forall z(C(z, x) \wedge C(x, z))] \models \exists x \exists v C(x, v).$$

4. Si dimostri per risoluzione la conseguenza logica dell'esercizio precedente.

5. È data la formula:

$$P \equiv \forall x \forall y[A(x, y) \to \exists z(z \neq x \wedge z \neq y \wedge A(x, z) \wedge A(z, y))] \wedge \exists x \exists y A(x, y).$$

   La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.

Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 31 maggio 2007
Tempo a disposizione: ore 2:00.

1. (i) Si dia la definizione conseguenza logica *nel caso predicativo.*

   (ii) Si consideri la classe di formule predicative costruite usando soltanto le due variabili x, y, un singolo predicato unario A, i connettivi $\wedge$ e $\vee$ (non ci sono quantificatori, né termini diversi dalle variabili x, y). Si dimostri per induzione che, per ogni formula P di tale classe, vale $A(x), A(y) \models P$.

2. Si consideri il linguaggio sui simboli di funzione $\{0, succ, +, *\}$ e di predicato $\{=\}$. Supponendo che questi simboli di funzione e di predicato siano interpretati col loro significato standard sul dominio dei numeri naturali, si dia la definizione di un predicato $P(y, z)$ che esprima la seguente frase "z è dispari e minore di y". (Si possono usare meta-definizioni ausiliarie; si osservi che $<$ *non* fa parte del linguaggio).

3. Usando il calcolo della deduzione naturale si dimostri la seguente conseguenza logica:

$$\forall x[A(x) \to \exists y C(x, f(y))], \exists x[A(x) \vee B(x)], \forall x[B(x) \to \forall z(C(z, x) \wedge C(x, z))] \models \exists x \exists v C(x, v).$$

4. Si dimostri per risoluzione la conseguenza logica dell'esercizio precedente.

5. È data la formula:

$$P \equiv \forall x \forall y[A(x, y) \to \exists z(z \neq x \wedge z \neq y \wedge A(x, z) \wedge A(z, y))] \wedge \exists x \exists y A(x, y).$$

   La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.