Corso di Logica Matematica[M-Z]
Prova scritta del 14 febbraio 2007
Tempo a disposizione: ore 2:00.

1. (i) Si dia la definizione di insieme consistente massimale.

   (ii) Se X è un insieme consistente massimale, può accadere che esista una formula A tale che $A \notin X$ e $\neg A \notin X$? Si dimostri quanto affermato.

2. Si consideri il linguaggio dell'aritmetica sui simboli di funzione $\{0, succ, +, *\}$ e di predicato $\{=\}$. Supponendo che questi simboli di funzione e di predicato siano interpretati col loro significato standard sul dominio dei naturali, si dia la definizione di un predicato $P(x)$ che esprima la seguente frase "Esistono almeno due numeri primi dispari". (Si possono usare meta-definizioni ausiliarie).

3. Usando il calcolo della deduzione naturale si dimostri la seguente conseguenza logica:

$$\forall x[\neg A(x, f(x)) \rightarrow \neg B(x)], \forall x B(x) \models \forall x \exists y A(x, y)$$

4. Si dimostri per risoluzione la conseguenza logica dell'esercizio precedente.

5. È data la formula:

$$P \equiv \forall x(x \neq f(f(x))) \wedge \forall x[A(x, x) \rightarrow \neg A(f(x), f(x))]$$

   La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.